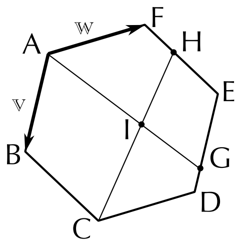
これまでの復習

2024

1 図の正六角形 ABCDEF において、$\overrightarrow{AB} = \mathbb{v}, \overrightarrow{AF} = \mathbb{w}$ とします。
　また、線分 DE を $1:3$ に内分する点を G、線分 EF を $3:2$ に内分する点を H とし、２直線 AG と CH の交点を I とします。

(1) $\overrightarrow{BC}$ を $\mathbb{v}, \mathbb{w}$ を使って表してください。
(2) $\overrightarrow{AG}$ を $\mathbb{v}, \mathbb{w}$ を使って表してください。
(3) $\overrightarrow{CH}$ を $\mathbb{v}, \mathbb{w}$ を使って表してください。
(4) $\overrightarrow{AI}$ を $\mathbb{v}, \mathbb{w}$ を使って表してください。



2 xyz 座標空間に 3 点 $A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3)$ があります。このとき以下の問いに答えて下さい。

(1) ２つのヴェクター $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ と直交するヴェクターを求めて下さい。

(2) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めて下さい。

(3) (2) の平面に関して点 $D(0,1,0)$ と対称な点を E とするとき、点 E の座標を求めて下さい。

3 $O(0,0,0).A(1,-2,-1), B(-2,-5,0), C(2,1,0)$ とします。

(1) 三角形 OBC の面積を求めて下さい。
(2) ４点 O, A, B, C を頂点とした三角錐 $OABC$ の体積を求めて下さい。ただし、一般に円錐・三角錐・四角錐などの錐体の体積が

$$(\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3}$$

で求められることは既知として良いものとします。

4 次の行列の逆行列を求めてください。ただし、少なくともどちらか一方は『掃き出し法』で計算して下さい。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} -11 & -16 & -1 \\ 16 & 20 & 2 \\ 10 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

5 A, B を２次正方行列とします。$A^2 = A, B^2 = B, (A+B)^2 = A+B$ のとき、以下の問いに答えて下さい。

(1) $AB + BA = O$ であることを証明して下さい。
(2) $AB = BA = O$ であることを証明して下さい。

6 次の行列式を計算して下さい。文字の入ったものは出来るだけ因数分解した形で答えてください。

(1) $\begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} ca & bc & c^2 \\ bc & c^2 & ca \\ bc & ab & b^2 \end{vmatrix}$

2023

7 次の行列の逆行列を求めてください。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -12 & -5 & 7 \\ -8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

8 3 次元たてヴェクター $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ に対して以下の等式を証明してください。

(1) $\mathbb{a} \cdot (\mathbb{a} \times \mathbb{b}) = 0$　　(2) $\mathbb{a} \cdot (\mathbb{b} \times \mathbb{c}) = \mathbb{b} \cdot (\mathbb{c} \times \mathbb{a})$

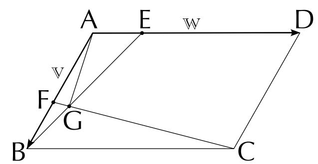
9 次の行列式を計算して下さい。文字の入ったものは因数分解した形で答えてください。

(1) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 101 & 102 & 103 \\ 102 & 103 & 104 \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

2022

10 図の平行四辺形 ABCD において、$\overrightarrow{AB} = \mathbb{v}, \overrightarrow{AD} = \mathbb{w}$ とします。
　また、線分 AD を $1:4$ に内分する点を E、線分 AB を $3:2$ に内分する点を F とし、２直線 BE と CF の交点を G とします。

(1) $\overrightarrow{CF}$ を $\mathbb{v}, \mathbb{w}$ を使って表してください。
(2) $\overrightarrow{BE}$ を $\mathbb{v}, \mathbb{w}$ を使って表してください。
(3) $\overrightarrow{AG}$ を $\mathbb{v}, \mathbb{w}$ を使って表してください。



11 直線 $ax+by+c=0$ が単位円 $x^2+y^2=1$ に接する条件を求めてください。

12 次の行列の逆行列を求めてください。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 37 & -15 \\ -10 & 12 \end{pmatrix}$

13 次の計算を実行して下さい。ただし定義できないものは『定義されない』と答えてください。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

14 次の行列式を計算して下さい。文字の入ったものは因数分解した形で答えてください。

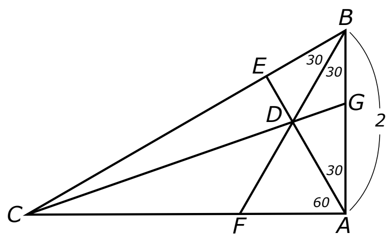
(1) $\begin{vmatrix} ab & ca & a^2 \\ bc & ab & b^2 \\ ca & bc & c^2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 5 & -31 & -10 \\ 7 & 13 & -14 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

2021

15 図の三角形 $\triangle ABC$ について以下の問いに答えてください。ただし、図の角度は 30 度、60 度を意味しています。

(1) 線分の比が $BE : EC = 1 : 3, CF : FA = 2 : 1$ となることを説明してください。

(2) $\overrightarrow{OD}$ を、$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ で表してください。ただし、O はどこかにある原点とします、



16 次の行列の逆行列を (1) ははきだし法で、(2) は余因子もしくはクロス積（外積）を使って求めて下さい。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

17 次の計算を実行して下さい。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

18 次の行列式を計算して下さい。ただし、(2) と (3) は因数分解した形で答えて下さい。

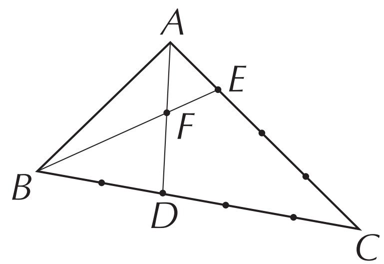
(1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2-m & -1 & 2 \\ -1 & 5-m & -1 \\ 2 & -1 & 2-m \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix}$

2020

19 $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい：

(1) 辺 BC を 2:3 に内分する点を D とした時、ヴェクター $\overrightarrow{AD}$ をヴェクター $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ で表して下さい。

(2) 辺 CA を 3:1 に内分する点を E とし、線分 BE と線分 AD の交点を F とします。この時点 F の位置ヴェクター $\overrightarrow{OF}$ を３頂点の位置ヴェクター $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ で表して下さい。



20 次の行列の逆行列をはきだし法で求めて下さい：$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

21 次の計算を実行して下さい。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (4) ${}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

22 次の行列式を計算して下さい。ただし (3) は因数分解した形で答えて下さい。

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$

４次以上の行列式　練習問題

基本演習 1 [2022 神戸大]

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

基本演習 2 [H20 広島大] 実数 a に対して行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & a & -2 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考えます。以下の問いに答えてください。

(1) A の行列式 $\det A$ を求めてください。

(2) $\det A = 0$ となるような非負の実数 a を求め、その時の A の階数を計算してください。

(3) 前問における a に対して、$A\mathbb{v} \neq \mathbb{o}$ かつ $A^2\mathbb{v} = \mathbb{o}$ となるようなベクトル $\mathbb{v} \in \mathbb{R}^4$ を１つ求めてください。

基本演習 3 [農工大、熊本大]

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a & a \\ a+b & a+b+c & a & a \\ a & a & a+b+c & a+b \\ a & a & a+b & a+b+c \end{vmatrix}$

発展演習 4 [大阪大、熊本大] **

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix}$

空間ヴェクターの練習問題

基本演習 5 四面体 $OABC$ の辺 OA, AB, BC, OC, OB, AC の中点をそれぞれ K, L, M, N, P, Q とするとき、次のことを証明してください。

(1) 四角形 $KLMN$ は平行四辺形である。

(2) 直線 KM, LN, PQ は１点で交わる。

基本演習 6 四面体 $OABC$ において、$OA \perp BC, OB \perp AC$ であるとき、次のことを証明してください。

(1) $OC \perp AB$

(2) $OA^2 + BC^2 = OB^2 + AC^2 = OC^2 + AB^2$

基本演習 7 正四面体 $OABC$ の相対する辺、たとえば OA と BC、は互いに垂直であることを証明してください。

発展演習 8 四面体 $TABC$ の内部に点 P があって、

$$\overrightarrow{TP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{TA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{TB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{TC}$$

が成り立っているとき、以下の問いに答えてください。

(1) 直線 TP と平面 ABC の交点を Q とするとき、$\overrightarrow{TQ}$ を $\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}$ を用いて表してください。

(2) 直線 AQ と辺 BC の交点 D に対して、$BD : DC$ を求めてください。

(3) $\triangle QCA$ の面積を S_2、$\triangle QAB$ の面積を S_3 とするとき、$S_2 : S_3$ を求めてください。

(4) 四面体 $PTAC$ の体積を V_2、四面体 $PTAB$ の体積を V_3 とするとき、$V_2 : V_3$ を求めてください。

(5) 四面体 $PABC, PTBC$ の体積をそれぞれ V_0, V_1 とするとき、$V_0 : V_1 : V_2 : V_3$ を求めてください。

(6) $V_0\overrightarrow{PT} + V_1\overrightarrow{PA} + V_2\overrightarrow{PB} + V_3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ が成り立つことを示してください。

発展演習 9 四面体 $OABC$ において、線分 AB の中点を P、線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q、線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とします。また３点 O, B, C を通る平面と直線 AR の交点を S、直線 OS と直線 BC の交点を T とします。

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表してください。

(2) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と、四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1 : V_2$ を求めてください。

演習問題解答例

基本演習 1 [2022 神戸大]

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

(1)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

(3)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c-a & d-b & a-c & b-d \\ d-b & c-a & b-d & a-c \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+c & b+d & c & d \\ b+d & a+c & d & c \\ 0 & 0 & a-c & b-d \\ 0 & 0 & b-d & a-c \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+c+b+d & b+d & c & c+d \\ b+d+a+c & a+c & d & c+d \\ 0 & 0 & a-c & b-d+a-c \\ 0 & 0 & b-d & a-c+b-d \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+c+b+d & b+d & c & c+d \\ 0 & a+c-b-d & d-c & 0 \\ 0 & 0 & a-c & b-d+a-c \\ 0 & 0 & b-d-a+c & 0 \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a+c-b-d & d-c & 0 \\ 0 & a-c & b-d+a-c \\ 0 & b-d-a+c & 0 \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} a-c & b-d+a-c \\ b-d-a+c & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)
\end{aligned}$$

□

基本演習 2 [H20 広島大] 実数 a に対して行列

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&a\\0&-1&a&-2\\2&a&1&0\\a&1&0&1\end{pmatrix}$$

を考えます。以下の問いに答えてください。

(1) A の行列式 $\det A$ を求めてください。

(2) $\det A=0$ となるような非負の実数 a を求め、その時の A の階数を計算してください。

(3) 前問における a に対して、$A\mathbb{v}\neq\mathbb{o}$ かつ $A^2\mathbb{v}=\mathbb{o}$ となるようなベクトル $\mathbb{v}\in\mathbb{R}^4$ を１つ求めてください。

(1)

$$\begin{vmatrix}1&0&2&a\\0&-1&a&-2\\2&a&1&0\\a&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&a\\0&-1&a&-2\\2&a&-3&0\\a&1&-2a&1\end{vmatrix}$$

$$=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&a&-2\\a&-3&0\\1&-2a&1\end{vmatrix}+a(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&-1&a\\2&a&-3\\a&1&-2a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-3a&0\\a&-3&0\\1&-2a&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}0&-1&a\\2&a&-3\\a&0&-a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-3a\\a&-3\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}0&-1&a\\2&a&-1\\a&0&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-3a\\a&-3\end{vmatrix}-a^2\begin{vmatrix}-1&a\\a&-1\end{vmatrix}$$

$$=-3+3a^2-a^2(1-a^2)$$

$$=a^4+2a^2-3$$

$$=(a^2+3)(a^2-1)$$

(2) $a=1$ です。このとき

$$\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&1&-2\\2&1&1&0\\1&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&1&-2\\0&1&-3&-2\\0&1&-2&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&1&-2\\0&0&-2&-4\\0&0&-1&-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&-1&1&-2\\0&0&-2&-4\\0&0&0&0\end{vmatrix}$$

ですから階数は 3 です。

(3)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&-1&1&-2\\2&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\qquad A^2=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&-1&1&-2\\2&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}6&3&4&2\\0&0&0&0\\4&0&6&0\\2&0&3&0\end{pmatrix}$$

$$A^2\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&-1&1&-2\\2&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\2\\-1\end{pmatrix}$$

□

基本演習 3 (1) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$ **（農工大）**

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

□

(2) $\begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a & a \\ a+b & a+b+c & a & a \\ a & a & a+b+c & a+b \\ a & a & a+b & a+b+c \end{vmatrix}$ **（熊本大）**

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a & a \\ a+b & a+b+c & a & a \\ a & a & a+b+c & a+b \\ a & a & a+b & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ a+b & a+b+c & a & a \\ 0 & 0 & c & -c \\ a & a & a+b & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ a+b & 2a+2b+c & a & 2a \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 2a & a+b & 2a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$= c\begin{vmatrix} 2a+2b+c & a & 2a \\ 0 & c & 0 \\ 2a & a+b & 2a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$= c^2\begin{vmatrix} 2a+2b+c & 2a \\ 2a & 2a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$= c^2\{(2a+2b+c)^2-(2a)^2\}$$

$$= c^2(4a+2b+c)(2b+c)$$

□

発展演習 4

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ **（大阪大）**

(1) $c \neq 0$ **のときは、**

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & \frac{ae}{c} & d+\frac{fa}{c} & e \\ 0 & -d+\frac{be}{c} & \frac{bf}{c} & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$= c\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{ae}{c} & d+\frac{fa}{c} & e \\ -d+\frac{be}{c} & \frac{bf}{c} & f \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c}\begin{vmatrix} a & b & c \\ ae & cd+af & ce \\ -cd+be & bf & cf \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c}\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & cd+af-be & 0 \\ -cd+be & bf & cf \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{c}\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & cd+af-be & 0 \\ -cd+be-af & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & cd+af-be \\ -cd+be-af & 0 \end{vmatrix} \\
&= (af+cd-be)^2
\end{aligned}
$$

です。

　また、元々この行列式は c の関数と見れば c の多項式ですから、$c=0$ で連続です。従って $c \neq 0$ のときの値の極限を取ればよく、$c=0$ のときは

$$
\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af-be)^2
$$

です。

　要するに、c の値によらず

$$
\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af+cd-be)^2
$$

です。 □

(2) $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix}$ （熊本大）

　(2) $abcd \neq 0$ のとき、

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a(a^2+1) & ab^2 & ac^2 & ad^2 \\ ba^2 & b(b^2+1) & bc^2 & bd^2 \\ ca^2 & cb^2 & c(c^2+1) & cd^2 \\ da^2 & db^2 & dc^2 & d(d^2+1) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a(a^2+b^2+c^2+d^2+1) & ab^2 & ac^2 & ad^2 \\ b(a^2+b^2+c^2+d^2+1) & b(b^2+1) & bc^2 & bd^2 \\ c(a^2+b^2+c^2+d^2+1) & cb^2 & c(c^2+1) & cd^2 \\ d(a^2+b^2+c^2+d^2+1) & db^2 & dc^2 & d(d^2+1) \end{vmatrix} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+1}{abcd}\begin{vmatrix} a & ab^2 & ac^2 & ad^2 \\ b & b(b^2+1) & bc^2 & bd^2 \\ c & cb^2 & c(c^2+1) & cd^2 \\ d & db^2 & dc^2 & d(d^2+1) \end{vmatrix} \\
&= (a^2+b^2+c^2+d^2+1)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 1 & b^2+1 & c^2 & d^2 \\ 1 & b^2 & c^2+1 & d^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & d^2+1 \end{vmatrix} \\
&= (a^2+b^2+c^2+d^2+1)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= a^2+b^2+c^2+d^2+1
\end{aligned}
$$

です。しかし、この行列式は a,b,c,d を変数としてみた場合、8 次（以下）の多項式であり、$abcd \neq 0$ を満たす無限個の点で $a^2+b^2+c^2+d^2+1$ と一致しており、従って、任意の点で一致しますから、

$$
\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1
$$

です。 □

基本演習 5 四面体 $OABC$ の辺 OA, AB, BC, OC, OB, AC の中点をそれぞれ K, L, M, N, P, Q とするとき、次のことを証明してください。
(1) 四角形 $KLMN$ は平行四辺形である。
(2) 直線 KM, LN, PQ は１点で交わる。

(1)

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

従って辺 KL と辺 MN は平行であり長さが等しいので、四角形 $KLMN$ は平行四辺形です。

(2) 平行四辺形 $KLMN$ の中心を G とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OG} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \\ &= 2\overrightarrow{PG}\end{aligned}$$

ですから、直線 PQ は点 G を通ることが分かります。従って問題の３直線は１点で交わります。 □

基本演習 6 四面体 $OABC$ において、$OA \perp BC, OB \perp AC$ であるとき、次のことを証明してください。
(1) $OC \perp AB$
(2) $OA^2 + BC^2 = OB^2 + AC^2 = OC^2 + AB^2$

(1) $OA \perp BC, OB \perp AC$ なので

$$0 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$0 = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} \cdot \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

ですから、第２式から第１式を引けば

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0\end{aligned}$$

となり、$OC \perp AB$ であることが分かります。

(2) $OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$ に注意します。

$$-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC}$$
$$\left|-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}$$
$$\left|-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$

から

$$OB^2 + AC^2 = OC^2 + AB^2$$

であり、また、

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$$
$$\left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$$

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}$$
$$\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BA}\right|^2$$

から

$$OA^2+BC^2=OC^2+AB^2$$

ですので、

$$OA^2+BC^2=OB^2+AC^2=OC^2+AB^2$$

が成り立ちます。 □

基本演習 7 正四面体 $OABC$ の相対する辺、たとえば OA と BC、は互いに垂直であることを証明してください。

４つの面がすべて正三角形のである場合、すべて合同な正三角形であることに注意します。

また、$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ のいずれか２つのベクトルの挟む角は $\frac{\pi}{3}$ です。すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right)\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\&=OA\cdot OC\cos\frac{\pi}{3}-OA\cdot OB\cos\frac{\pi}{3}\\&=0\end{aligned}$$

となって、OA と BC は垂直であることが分かります。他の組み合わせも同様です。 □

発展演習 8 四面体 $TABC$ の内部に点 P があって、

$$\overrightarrow{TP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{TA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{TB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{TC}$$

が成り立っているとき、以下の問いに答えてください。

(1) 直線 TP と平面 ABC の交点を Q とするとき、$\overrightarrow{TQ}$ を $\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TC}$ を用いて表してください。

(2) 直線 AQ と辺 BC の交点 D に対して、$BD:DC$ を求めてください。

(3) $\triangle QCA$ の面積を S_2、$\triangle QAB$ の面積を S_3 とするとき、$S_2:S_3$ を求めてください。

(4) 四面体 $PTAC$ の体積を V_2、四面体 $PTAB$ の体積を V_3 とするとき、$V_2:V_3$ を求めてください。

(5) 四面体 $PABC, PTBC$ の体積をそれぞれ V_0, V_1 とするとき、$V_0:V_1:V_2:V_3$ を求めてください。

(6)
$$V_0\overrightarrow{PT}+V_1\overrightarrow{PA}+V_2\overrightarrow{PB}+V_3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

が成り立つことを示してください。

(1)

$$\overrightarrow{TP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{TA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{TB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{TC}=\frac{2}{12}\overrightarrow{TA}+\frac{3}{12}\overrightarrow{TB}+\frac{4}{12}\overrightarrow{TC}=\frac{9}{12}\left(\frac{2}{9}\overrightarrow{TA}+\frac{3}{9}\overrightarrow{TB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{TC}\right)$$

ですから、$\overrightarrow{TR}=\frac{4}{3}\overrightarrow{TP}$ となる点を P とすると

$$\overrightarrow{TR}=\frac{2}{9}\overrightarrow{TA}+\frac{3}{9}\overrightarrow{TB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{TC}$$

であって

$$\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}=1$$

により、点 R は平面 ABC 上にありますから、この点が問題の点 Q です。つまり、

$$\overrightarrow{TQ}=\frac{2}{9}\overrightarrow{TA}+\frac{3}{9}\overrightarrow{TB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{TC}$$

です。

(2)

$$\overrightarrow{TQ}=\frac{2}{9}\overrightarrow{TA}+\frac{3}{9}\overrightarrow{TB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{TC}$$
$$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{9}\overrightarrow{TA}+\frac{3}{9}\left(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AB}\right)+\frac{4}{9}\left(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \frac{3}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{7}{9}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)\end{aligned}$$

ですから、$\overrightarrow{AS}=\frac{9}{7}\overrightarrow{AQ}$ となる点 S は

$$\overrightarrow{AS}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$$

を満たしており、$\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$ ですから、点 S は辺 BC 上にあって、辺 BC を $4:3$ に内分しています。これが問題の点 D です。

したがって、

$$BD:DC=4:3$$

です。

(3) (2) の結果から、$S_2:S_3=3:4$ です。

(4) 三角形 QAB, QCA をそれぞれの底面とし、高さが等しい四面体の体積比は定面積比に等しいので、

（四面体 $TQCA$ の体積）:（四面体 $TQAB$ の体積）$=$（$\triangle QCA$ の面積）:（$\triangle QAB$ の面積）

（四面体 $PQCA$ の体積）:（四面体 $PQAB$ の体積）$=$（$\triangle QCA$ の面積）:（$\triangle QAB$ の面積）

となっていますから、差をとれば

（四面体 $TPCA$ の体積）:（四面体 $TPAB$ の体積）$=$（$\triangle QCA$ の面積）:（$\triangle QAB$ の面積）

$$V_2:V_3=S_2:S_3=3:4$$

です。

(5) 全く同様な議論によれば、

$$V_1:V_2=\triangle QBC:\triangle QCA=2:3$$

となりますから、

$$V_1:V_2:V_3=2:3:4$$

であり、また、$TP:PQ=3:1$ でしたから、$V_1+V_2+V_3:V_0=3:1$ であって、

$$V_0:V_1:V_2:V_3=3:2:3:4$$

です。

(6)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TP}&=\frac{1}{6}\overrightarrow{TA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{TB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{TC}\\ \overrightarrow{TP}&=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{PA}\right)+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{PB}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{PC}\right)\\ \vec{0}&=\frac{3}{12}\overrightarrow{PT}+\frac{1}{6}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}\\ \vec{0}&=3\overrightarrow{PT}+2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}\end{aligned}$$

ですから

$$V_0\overrightarrow{PT}+V_1\overrightarrow{PA}+V_2\overrightarrow{PB}+V_3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

が成り立ちます。 □

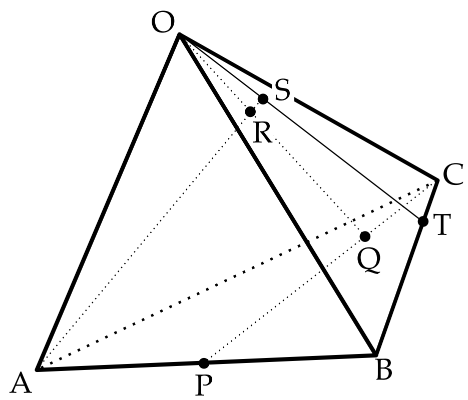
発展演習 9 四面体 $OABC$ において、線分 AB の中点を P、線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q、線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とします。また３点 O,B,C を通る平面と直線 AR の交点を S、直線 OS と直線 BC の交点を T とします。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表してください。

(2) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と、四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1:V_2$ を求めてください。

(1)(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{OQ}\\ &=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\right)\\ &=\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}\\ &=\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{2}{9}\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}\right)\\ &=\frac{1}{9}\overrightarrow{OP}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OC}\\ &=\frac{1}{18}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{18}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{18}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OR} \\
&= \overrightarrow{AO} + \frac{1}{18}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{18}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{4}{18}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{12}{18}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{18}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{17}{18}\left(\frac{12}{17}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{17}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{17}\overrightarrow{AC}\right)
\end{aligned}
$$

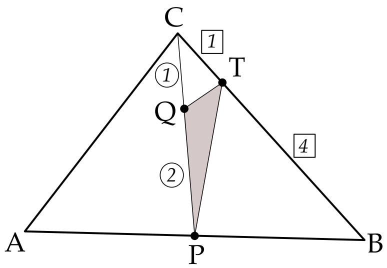
です。また直線 AR の延長線が平面 OBC と交わる点が S でしたから

$$
\overrightarrow{AS} = \frac{12}{17}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{17}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{17}\overrightarrow{AC}
$$

です。従って

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{12}{17}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{17}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) + \frac{4}{17}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right) \\
&= \frac{1}{17}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{17}\overrightarrow{OC} \\
&= \frac{1}{17}\vec{b} + \frac{4}{17}\vec{c} \\
&= \frac{5}{17}\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OC}\right) \\
\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OC}
\end{aligned}
$$

が分かります。



$\triangle ABC = S$ とすれば、

$$
\triangle PBC = \frac{1}{2}S
$$

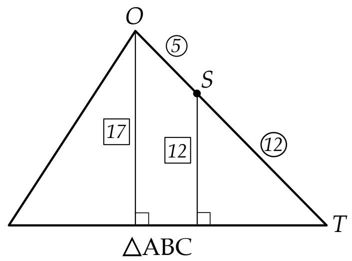
$$
\triangle PTC = \frac{1}{5}\triangle PBC = \frac{1}{10}S
$$

$$
\triangle PTQ = \frac{2}{3}\triangle PTC = \frac{1}{15}S
$$

であって、高さの比が $17:12$ ですから、体積比は

$$
V_1 : V_2 = 17S : 12 \cdot \frac{1}{15}S = 17 : \frac{4}{5} = 85 : 4
$$

です。



□