

1. 配点: (1)~(6) 各5点 シラバス: ア, ウ

$$(1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これがきちり求まって
いれは3点.

$$(2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

この変形が出来て
れば2点.

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1行だけのシ
であれば-1~
-2点. 1にとどめ
るが. それ以上
は0点.

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

これもほぼ完全解答とする

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^5 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right\}^5$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 3^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -179 & -422 \\ 211 & 454 \end{pmatrix}$$

最終的な形が、
多少(21個まで)の
違いであれば部分
点. 3点とする

2. 配点: 5点 シラバス: ウ

行列の積では、 AB と BA は一般には異なる. 逆だと積が
定義すらされない事もある. また、 A が0かつ B が0であつても
 $AB=0$ となる事がある.

この2つの論点が出来れば5点. 一方のみは3点. 何が書いてある
が、これらと論点がずれているものは2点とする.

3. 配点: (1) 10点
(2) 10点
(3)~(5) 5点.

シラバス: ア, エ,

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) 題意より,

$M \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

であるから、これを合わせて

$M \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

を得る.

従って,

$M = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 24 & 63 \\ 9 & 24 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

とよぶ.

これが式で表現
出来れば4点

この形に出て
いれば6点

$\frac{1}{3}$ を忘れただけのものは
-2点とする.

(3) $M \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127 \\ 48 \end{pmatrix}$

これが求まっていれば3点.

これを $X^2 - 7Y^2$ に $X=127, Y=48$ として代入すると,

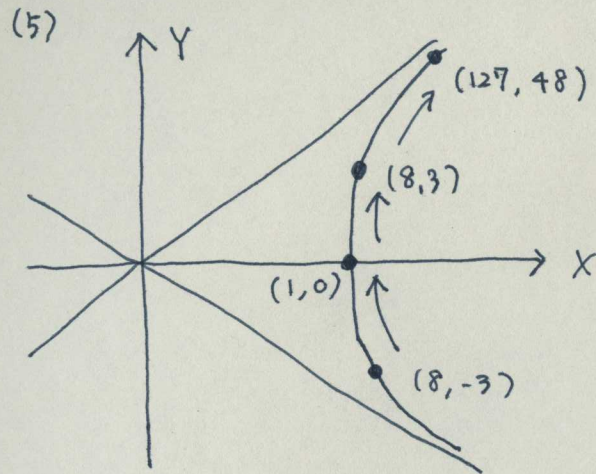
$(127)^2 - 7(48)^2 = 1$

となつて、確かに $X=127, Y=48$ は元の方程式の正の整数解である.

この様にきちんと確認がなされれば5点を与える.

(4) 任意の $n(=1, 2, 3, \dots)$ に対して $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は正の整数解になるのではないかと予想される.

単に、解が無限個あると言う事でも可.



双曲線が
書かれていれば
4点。更に
明確な矢印
があれば5点。

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 2 \cdot (-4) + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 = -13$$

行列式で
3点

であるから、結局、 A の逆行列 A^{-1} は、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t(A_{ij})$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ -2 & -17 & 7 \\ -3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

転置のしやす
のみは-2点

4. 配点: 15点 シラバス: オ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{とあれば、その } (i, j)\text{-余因子 } A_{ij} \text{ は、}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

余因子全てあっていれば10点

7ミス ... -3点

7ミス ... -6点

7ミス ... -6点

であり、また、行列式 $|A|$ は

5. 配点:15点 シラバス:カ

1	2	3	-2	①
2	3	4	0	②
5	6	5	2	③
1	2	3	-2	①
2	3	4	0	②
3	3	1	2	③-②=④
1	2	3	-2	①
2	3	4	0	②
1	0	-3	2	④-②=⑤
1	2	3	-2	①
0	-1	-2	4	②-2×①=⑥
0	-2	-6	4	⑤-①=⑦
1	2	3	-2	①
0	1	2	-4	-⑥=⑧
0	-2	-6	4	⑦
1	0	-1	6	①-2×⑧=⑨
0	1	2	-4	⑧
0	0	-2	-4	⑦+2×⑧=⑩
1	0	-1	6	⑨
0	1	2	-4	⑧
0	0	1	2	$-\frac{1}{2}⑩ = ⑪$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} ⑨+⑪ \\ ⑧-2\times⑪ \\ ⑪ \end{array}$$

以上により、解は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。

基本的には完全解答で15点.
とするが、ミスの程度を、結果
のレベルにおいて判断して、多
少の部分点は与える。