

1 2 次方程式：

$$-2x^2 + 6xy - 2y^2 = 1$$

について、以下の問いに答えて下さい：

(1)

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2x^2 + 6xy - 2y^2$$

となる実数  $a$ 、 $b$  および  $c$  を求めて下さい。

(2) (1) に現れた行列

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

の固有値・固有ベクトルを求めて対角化して下さい。

(3) この 2 次方程式の表す曲線は楕円でしょうか双曲線でしょうか。(2) の結果から予想して下さい (厳密な計算は必要ありません)。

配点： (1) -10 点、(2) -20 点、(3) -5 点

シラバス： (ア)、(イ)、(ウ)、(キ)

#### 解答例

(1) 左辺の行列の積を計算すると

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

なので、係数を比較して、 $a = -2$ 、 $b = 3$ 、 $c = -2$  である。

(2)  $F$  の固有方程式は、

$$0 = |F - xE| = \begin{vmatrix} -2-x & 3 \\ 3 & -2-x \end{vmatrix} = (x+2)^2 - 9 = x^2 + 4x - 5$$

なので、固有値、つまり固有方程式の解は  $1, -5$  である。

#### 固有値 1 について

$$F\mathbf{p} = \mathbf{p}$$

つまり、

$$(F - E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

となる様なベクトル  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  を求めれば良いので、これを成分で書いて、

$$(F - E)\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得るが、これは 1 本の式

$$p - q = 0$$

と同値であるから、結局、

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって、求める固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  である。

#### 固有値 -5 について

$$F\mathbf{p} = -5\mathbf{p}$$

つまり、

$$(F + 5E)\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

となる様なベクトル  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  を求めれば良いので、これを成分で書いて、

$$(F + 5E)\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得るが、これは 1 本の式

$$p + q = 0$$

と同値であるから、結局、

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となって、求める固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  である。

今求めた 2 つの固有ベクトルを並べて得られる行列  $P$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

によって  $P^{-1}FP$  を計算すれば、

$$P^{-1}FP = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

となって  $F$  は対角化される。

(2) 固有値が正のものと負のものが 1 つずつなので、双曲線である。

(1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ g \\ 1 \end{pmatrix}$  が  $M$  の固有ベクトルになるような  $g$  の値を求めて下さい。

(2)  $M$  の固有値を全て求めて下さい。

配点：(1) -5 点、(2) -5 点 シラバス：(ウ)、(オ)、(キ)

解答例

(1)

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ g \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d & -d \\ d & 1 & d \\ -d & d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ g \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + gd - d \\ g + 2d \\ 1 + gd - d \end{pmatrix}$$

であるので、これが固有ベクトルである為には、第 1、3 成分を見れば、固有値は  $1 + gd - d$  でなければならない、従って、第 2 成分によれば、

$$g + 2d = (1 + gd - d)g$$

でなければならない。

これを  $g$  についての方程式として整理すると、

$$dg^2 - dg - 2d = 0$$

すなわち、

$$g^2 - g - 2 = 0$$

となり、これは  $g = -1, 2$  を意味する。

2 3 次正方行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d & -d \\ d & 1 & d \\ -d & d & 1 \end{pmatrix}$$

について (ただし、 $d \neq 0$  とします)、以下の問いに答えて下さい：

(2)  $M$  の固有方程式は、

$$\begin{aligned} 0 &= |M - xE| \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & d & -d \\ d & 1-x & d \\ -d & d & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)^3 - 2d^3 - 3d^2(1-x) \\ &= -x^3 + 3x^2 + (-3 + 3d^2)x + 1 - 2d^3 - 3d^2 \end{aligned}$$

であるが、まず、(1) により、 $1-2d, 1+d$  は  $M$  の固有値である事が分かるので、この 3 次方程式は  $(x-1+2d)(x-1-d) = x^2 + (-2+d)x - (2d-1)(d+1)$  で割り切れるはずである。

実際に割ってみれば、

$$\begin{aligned} &-x^3 + 3x^2 + (-3 + 3d^2)x + 1 - 2d^3 - 3d^2 \\ &= \{x^2 + (-2+d)x - (2d-1)(d+1)\}(-x+1+d) \\ &= -(x-1-d)^2(x-1+2d) \end{aligned}$$

となるので、 $M$  の固有値は、 $1+d, 1-2d$  の 2 つである事がわかる。

3 次の行列を対角化して下さい：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

配点：30点 シラバス：(ウ)、(オ)、(キ)

解答例

問題の行列を  $M$  として、まず固有値を求める。 $M$  の固有方程式は、

$$\begin{aligned} 0 &= |M - xE| \\ &= \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 2 \\ -1 & 5-x & -1 \\ 2 & -1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x)(5-x)(2-x) + 2 + 2 - (2-x) - (2-x) - 4(5-x) \\ &= (5-x)(x^2 - 4x + 4) + 6x - 20 \\ &= -x^3 + 9x^2 - 18x \\ &= -x(x^2 - 9x + 18) \\ &= -x(x-3)(x-6) \end{aligned}$$

となるので、その解、即ち固有値は、0, 3, 6 である。

次に各固有値に対して固有ベクトルを求める。

固有値 0 について

$M\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  を求めれば良いが、これを成分で書けば、

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。

これは 2 本の連立方程式：

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

であり、 $z$  をあきらめてしまえば、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2z \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2z \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2z \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -z \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので、結局、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、固有値 0 に対応した固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

固有値 3 について

$M\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$  すなわち、 $(M - 3E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  を求めれば良いが、

これを成分で書けば、

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。

固有値の性質からこの係数行列は正則ではないので、これは 2 本の連立方程式：

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

と同等であり、 $x$  をあきらめてしまえば、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので、結局、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、固有値 3 に対応した固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

固有値 6 について

$M\mathbf{x} = 6\mathbf{x}$  すなわち、 $(M - 6E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  を求めれば良いが、

これを成分で書けば、

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。

固有値の性質からこの係数行列は正則ではないので、これは 2 本の連立方程式：

$$\begin{cases} -4x - y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

と同等であり、 $y$  をあきらめてしまえば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、結局、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \\ -\frac{1}{2}y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、固有値 6 に対応した固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

最後に、対角化する。

固有ベクトルを並べた行列  $P$  を、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば、固有ベクトルの性質から

$$\begin{aligned} MP &= M \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( M \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 6 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( 0P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 6P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。従って、

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となって対角化される。

配点：(1) - 10 点、(2) - 5 点 | シラバス：(ウ)、(オ)

### 解答例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

として計算する。

(1) :

$$\begin{aligned} |AB| &= \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{vmatrix} \\ &= (ax + bz)(cy + dw) - (ay + bw)(cx + dz) \\ &= acxy + adxw + bcyz + bdzw - (acxy + adyz + bcxw + bdzw) \\ &= adxw + bcyz - adyz - bcxw \\ &= ad(xw - yz) - bc(xw - yz) \\ &= (ad - bc)(xw - yz) \\ &= |A| |B| \end{aligned}$$

(2) :

$$\begin{aligned} |A + B| &= \begin{vmatrix} a + x & b + y \\ c + z & d + w \end{vmatrix} \\ &= (a + x)(d + w) - (b + y)(c + z) \\ &= ad + aw + dx + xw - (bc + bz + cy + yz) \end{aligned}$$

4 2つのベクトル  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  を並べて得られる行列  $H = (\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2)$  が、 ${}^tH = H^{-1}$  を満たす為には  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  は直交していなければならない事を示して下さい。

配点：5 点 | シラバス：(ア)、(イ)、(ウ)

### 解答例

${}^tH = H^{-1}$  であると仮定すると、 ${}^tHH = E$  となるので、

$${}^tH = {}^t(\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2) = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{h}_1 \\ {}^t\mathbf{h}_2 \end{pmatrix}$$

に注意すれば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^tHH = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{h}_1 \\ {}^t\mathbf{h}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2) = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{h}_1\mathbf{h}_1 & {}^t\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 \\ {}^t\mathbf{h}_2\mathbf{h}_1 & {}^t\mathbf{h}_2\mathbf{h}_2 \end{pmatrix}$$

となり、(1, 2)-成分を見れば  ${}^t\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 = 0$  であるが、

$${}^t\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2$$

であったので、結局内積が 0、すなわち、直交する事が分かる。

5 (1)  $A, B$  を 2 次正方行列としたとき、 $|AB| = |A||B|$  であることを示して下さい。

(2)  $|A + B| + |A - B|$  を  $|A|$  と  $|B|$  で表して下さい。

と

$$\begin{aligned} |A - B| &= \begin{vmatrix} a-x & b-y \\ c-z & d-w \end{vmatrix} \\ &= (a-x)(d-w) - (b-y)(c-z) \\ &= ad - aw - dx + xw - (bc - bz - cy + yz) \end{aligned}$$

によれば、

$$|A + B| + |A - B| = 2(ad - bc) + 2(xw - yz) = 2|A| + 2|B|$$

である。

6 行列  $\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  が対角化不可能であるための条件を求めてください。

配点：5 点 シラバス：(キ)

#### 解答例

この行列の固有値は  $p$  と 1 である。

もし、 $p \neq 1$  ならば、それぞれに対して必ず固有ベクトルが存在してしまい、結果的に対角化が出来てしまう。

従って、対角化出来ない為には、少なくとも、 $p = 1$  でなければならない。

また、 $p = 1$  であっても、この固有値 1 に対応した固有ベクトルが 2 本存在してしまったらこの行列は対角化されてしまうので、後は固有ベクトルが 1 本しかない為の条件を探せば良いことになる。

固有値 1 に関する固有ベクトルを求めてみよう。それは、題意の行列を  $Q$  として、 $Q\mathbf{x} = \mathbf{x}$  すなわち、 $(Q - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  となる様なベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  で

あるから、この連立方程式を成分で書いて

$$0x + qy = 0$$

を解けば良いことになる。

$q \neq 0$  の場合は、両辺を  $q$  で割る事が出来て、 $y = 0$  となり、従って、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より、固有ベクトルは 1 本しかない事が分かる。

しかし、 $q = 0$  の場合は、この方程式は  $0x + 0y = 0$  であり、これを満たす  $x, y$  は全ての  $x, y$  であるから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって、固有ベクトルは 2 本存在する。これは対角化出来る場合である。

以上により、問題の行列が対角化不可能である為の条件は、 $p = 1$  かつ、 $q \neq 0$  である。