

1. 3次元ベクトルの外積は次の2つの性質を持っています：

(い) 任意のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

(ろ) 任意のベクトル $\mathbf{c}$ に対して、 $\mathbf{c} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

この2つの性質について、次の問に答えて下さい：

(1) (い) を使って (ろ) を証明して下さい。

(2) (ろ) を使って (い) を証明して下さい。

ただし、外積の線形性：

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \times \mathbf{h} = \mathbf{f} \times \mathbf{h} + \mathbf{g} \times \mathbf{h}$$

$$\mathbf{p} \times (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{r}$$

は証明なしに使って下さい。

配点：(1)：10点、(2)：5点 シラバス達成度目標：(ア)

解答例

(1)：(い) において $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$ とすれば、

$$\mathbf{c} \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{c} \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{c} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

が得られる。

(2)：(ろ) において、 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ とおけば、

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

であるが、左辺第1項と第4項は(ろ)から $\mathbf{0}$ であり、結局

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

となる。

2. 3次元のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は、共にゼロベクトルではないとします。
このとき外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はベクトル $\mathbf{a}$ と直交する事を示して下さい。

配点：10点 シラバス達成度目標：(ア)、(イ)

解答例

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の成分をそれぞれ

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

とおくと、その外積は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

であるので、 $\mathbf{a}$ との内積をみると、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1a_2b_3 + a_2a_3b_1 + a_3a_1b_2 - a_1a_3b_2 - a_2a_1b_3 - a_3a_2b_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となって、内積が 0 なので題意のベクトルは直交する。

従って、

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BD} \\ &= \vec{AB} + \frac{AB}{AB+AC} \vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{AB}{AB+AC} (\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= \frac{AC \cdot \vec{AB} + AB \cdot \vec{AC}}{AB+AC}\end{aligned}$$

3. 三角形 ABC において、 $\angle CAB$ の 2 等分線が辺 BC と交わる点を D とします。

このとき、ベクトル $\vec{AD}$ をベクトル $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ で表して下さい。

配点：16 点 シラバス達成度目標：(ア)

解答例

三角形 ABD の面積を S_1 、三角形 ADC の面積を S_2 とします。

2 等分された角を $\angle DAB (= \angle CAD) = \theta$ と置けば、

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \theta, \quad S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \theta$$

となるので、面積比は

$$S_1 : S_2 = AB : AC$$

である事がわかります。

しかし、一方で頂点 A から対辺（もしくはその延長線上）に下ろした垂線の長さを h とすれば、 S_1, S_2 は

$$S_1 = \frac{1}{2} BD \cdot h, \quad S_2 = \frac{1}{2} DC \cdot h$$

とも書けるので、結局その面積比から

$$BD : DC = AB : AC$$

である事がわかります。

が得られます。

4. 次の方程式：

$$X^2 - 8Y^2 = 1$$

の整数解 (X, Y) は、 $0 \leq X \leq 100$ かつ $0 \leq Y \leq 100$ の範囲に 4 組ありますが、一次変換を上手く使う事によって 4 組全てを求めて下さい。

配点：20 点 シラバス達成度目標：(ウ)、(エ)

解答例

まず明らかに $(X, Y) = (1, 0), (3, 1)$ は題意の方程式の整数解であるので、

$$M \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる様な一次変換 M を考えると、その表現行列 M は

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる事が分かる。

そこで、この行列を使って $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を順次求めると、

$$M^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad M^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix}$$

となるが、ここで

$$17^2 - 8 \cdot 6^2 = 289 - 288 = 1$$

$$99^2 - 8 \cdot 35^2 = 9801 - 9800 = 1$$

から、 $(X, Y) = (1, 0), (3, 1), (17, 6), (99, 35)$ はいずれも題意の方程式を満たす。

しかもそう云うものは $0 \leq X \leq 100, 0 \leq Y \leq 100$ の範囲に 4 つあると言っているのだからこれが全てである。

5. 次の行列式を計算して下さい。

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 12 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix}$$

配点：各 5 点 シラバス達成度目標：(オ)

解答例

(1) :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 21$$

(2) :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 12 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 27 & 21 & 5 \\ 30 & 26 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 27 & 21 \\ 30 & 26 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 21 & 27 \\ 26 & 30 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 21 & 27 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3(21 - 45) \\ &= -72 \end{aligned}$$

(3) :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

となり、すると第 3 行から $m+n$ が括り出せて

6. 次の行列式を因数分解して下さい。

$$(1) \begin{vmatrix} l+m+n & -n & -m \\ -n & l+m+n & -l \\ -m & -l & l+m+n \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2-m & -1 & 2 \\ -1 & 5-m & -1 \\ 2 & -1 & 2-m \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix}$$

配点：各 8 点

シラバス達成度目標：(オ)

解答例

(1) : 行列式を変形してゆくと

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} l+m+n & -n & -m \\ -n & l+m+n & -l \\ -m & -l & l+m+n \end{vmatrix} & & \\ \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} l+m+n & -n & -(m+n) \\ -n & l+m+n & m+n \\ -m & -l & m+n \end{vmatrix}$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3}+\textcircled{2}$$

$$= (m+n) \begin{vmatrix} l+m+n & -n & -1 \\ -n & l+m+n & 1 \\ -m & -l & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{array}$$

$$= (m+n) \begin{vmatrix} l+m+n & -n & -1 \\ l+m & l+m & 0 \\ l+n & -(l+n) & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{4} \\ \textcircled{5}+\textcircled{4} \\ \textcircled{6}+\textcircled{4} \end{array}$$

$$= (m+n)(-1)(-1)^{1+3}(l+m)(l+n) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(l+m)(m+n)(n+l)$$

となる。

(2) : 第 2、3 行を第 1 行に加えると

$$\begin{vmatrix} 2-m & -1 & 2 \\ -1 & 5-m & -1 \\ 2 & -1 & 2-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-m & -1 & 2 \\ 3-m & 5-m & -1 \\ 3-m & -1 & 2-m \end{vmatrix}$$

となり、第 1 行から $3 - m$ を括り出せば

$$=(3-m) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5-m & -1 \\ 1 & -1 & 2-m \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &=(3-m) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6-m & -3 \\ 0 & 0 & -m \end{vmatrix} \\ &=-m(m-3)(m-6) \end{aligned}$$

と因数分解される。

(3)：第 1 行を第 3 行に加えると

$$\begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & s^2 & s+t+u \\ t & t^2 & s+t+u \\ u & u^2 & s+t+u \end{vmatrix}$$

となるのでこれを括り出して

$$=(s+t+u) \begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ t & t^2 & 1 \\ u & u^2 & 1 \end{vmatrix}$$

であるが、更に第 1 列を第 2、3 列からそれぞれ引けば

$$=(s+t+u) \begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ t-s & t^2-s^2 & 0 \\ u-s & u^2-s^2 & 0 \end{vmatrix}$$

となってこれを余因子展開して

$$\begin{aligned} &=(s+t+u)(t-s)(u-s)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & t+s \\ 1 & u+s \end{vmatrix} \\ &=(s-t)(t-u)(u-s)(s+t+u) \end{aligned}$$

を得る。