

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を求めて下さい。

配点：15点 シラバス達成度目標：(キ)

解答例： この行列の固有方程式を計算すると

$$\begin{aligned}
 0 &= |A - zE| \\
 &= \begin{vmatrix} 5-z & 2 & 0 \\ 1 & 4-z & 2 \\ 1 & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 7-z & 2 & 0 \\ 7-z & 4-z & 2 \\ 7-z & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\
 &= (7-z) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4-z & 2 \\ 1 & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\
 &= (7-z) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-z & 2 \\ 1 & 1 & 3-z \end{vmatrix} \\
 &= (7-z) \begin{vmatrix} 2-z & 2 \\ 1 & 3-z \end{vmatrix} \\
 &= (7-z) \{(2-z)(3-z) - 2\} \\
 &= (7-z)(z^2 - 5z + 4) \\
 &= (7-z)(z-1)(z-4)
 \end{aligned}$$

となるのでその解すなわち固有値は1, 4, 7である。

2. 行列 $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ は固有値 $-1, 1, 3$ をもつ事が知られています。
それぞれの固有値に関する固有ベクトルを求めて下さい。

配点：21点 シラバス達成度目標：(ア)、(キ)

解答例： [固有値 -1 について] 求める固有ベクトルは $(B + E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{x}$ であるから、連立方程式

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ -6 & 2 & 12 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば良い。

どうせ左辺の係数行列は正則ではないのだから3本ある方程式も実質2本である。そこで、第2、3式を使って z は諦めてしまえば、

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -12z \\ 4z \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -12z \\ 4z \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12z \\ 4z \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -32z \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

[固有値 1 について] 求める固有ベクトルは $(B - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{x}$ であるから、連立方程式

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & -16 \\ -6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば良い。

どうせ左辺の係数行列は正則ではないのだから 3 本ある方程式も実質 2 本である。そこで、第 2、3 式を使って z は諦めてしまえば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -12z \\ 6z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -12z \\ 6z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12z \\ 6z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -24z \\ -12z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

[固有値 3 について] 求める固有ベクトルは $(B - 3E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{x}$ であるから、連立方程式

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -16 \\ -6 & -2 & 12 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば良い。

どうせ左辺の係数行列は正則ではないのだから 3 本ある方程式も実質 2 本である。そこで、第 2、3 式を使って z は諦めてしまえば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -12z \\ 8z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -12z \\ 8z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12z \\ 8z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -8z \\ -24z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \\ 3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

3. 行列 $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求め、更に $D^{-1}CD$ が対角行列になる様な行列 D を求めて下さい。ただし、その際 D^{-1} は計算しなくて構いません。

配点：30点 | シラバス達成度目標：(キ)

解答例： まず固有値を求めるために固有方程式の計算をする。

$$\begin{aligned} 0 &= |C - gE| \\ &= \begin{vmatrix} 3-g & 2 & -2 \\ 2 & 3-g & -2 \\ -2 & -2 & 3-g \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3-g & 2 & -2 \\ 2 & 3-g & -2 \\ -2 & -2 & 3-g \end{vmatrix} \\ &= (3-g)^3 + 8 + 8 - 4(3-g) - 4(3-g) - 4(3-g) \\ &= 27 - 27g + 9g^2 - g^3 - 20 + 12g \\ &= -g^3 + 9g^2 - 15g + 7 \\ &= -(g-1)(g^2 - 8g + 7) \\ &= -(g-1)^2(g-7) \end{aligned}$$

これにより固有値は1, 7である事が分かる。

[固有値1について] 求める固有ベクトルは $(C - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{x}$ であるから、連立方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば良い。しかしこの3本は全て同じ式である。従って $z = x + y$ となるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y \end{pmatrix} \\ = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

[固有値 7 について] 求める固有ベクトルは $(B - 7E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{x}$ であるから、連立方程式

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば良い。どうせ左辺の係数行列は正則ではないのだから3本ある

方程式も実質2本である。そこで、第1、2式を使って z は諦めてしまえば、

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -12z \\ -12z \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -z \\ -z \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

より、求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。

そこで、行列 D を

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$\begin{aligned} CD &= C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \left(C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \\ &= D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \\ D^{-1}CD &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって、これが問題の条件を満たす行列である。

4. 行列 $F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めて下さい。

配点：14点 | シラバス達成度目標：(ウ)、(カ)

解答例：掃き出し法で計算してみる。

2	3	-2	1	0	0	①
-2	-2	1	0	1	0	②
4	-1	6	0	0	1	③
2	3	-2	1	0	0	①
0	1	-1	1	1	0	②+①=④
0	-7	10	-2	0	1	③-2①=⑤
2	0	1	-2	-3	0	①-3④=⑥
0	1	-1	1	1	0	④
0	0	3	5	7	1	⑤+7④=⑦
6	0	3	-6	-9	0	3⑥=⑧
0	3	-3	3	3	0	3④=⑨
0	0	3	5	7	1	⑦
6	0	0	-11	-16	-1	⑧-⑦
0	3	0	8	10	1	⑨+⑦
0	0	3	5	7	1	⑦

従って求める逆行列は

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -11 & -16 & -1 \\ 16 & 20 & 2 \\ 10 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

5. 連立方程式：

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

の解は m の値によってどう変化しますか。

配点：10点 シラバス達成度目標：(オ)、(力)

解答例： 左辺の係数行列の行列式を計算すると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ m+2 & m & 1 \\ m+2 & 1 & m \end{vmatrix} \\ &= (m+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \\ &= (m+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} \\ &= (m+2)(m-1)^2 \end{aligned}$$

となって、この行列は $m = 1, -2$ 以外の時は正則である。正則なら逆行列があるので計算すれば、この行列を M 、余因子を $M_{i,j}$ として、

$$\begin{aligned} M_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 \\ M_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 1 - m \\ M_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m \end{aligned}$$

$$M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 1 - m$$

$$M_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

$$M_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m$$

$$M_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m$$

$$M_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m$$

$$M_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

より、

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{(m+2)(m-1)^2} \begin{pmatrix} m^2 - 1 & 1 - m & 1 - m \\ 1 - m & m^2 - 1 & 1 - m \\ 1 - m & 1 - m & m^2 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(m+2)(m-1)} \begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が分かる。

また、ベクトルの内積・外積を使って計算すれば

$$\begin{aligned}
 M^{-1} &= \frac{1}{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{r})} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \times \mathbf{r} & \mathbf{r} \times \mathbf{p} & \mathbf{p} \times \mathbf{q} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \right\}} \\
 &\quad \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m^2 - 1 \\ 1 - m \\ 1 - m \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2 - 1 \\ 1 - m \\ 1 - m \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 - m \\ m^2 - 1 \\ 1 - m \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 - m \\ 1 - m \\ m^2 - 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{m(m+1) - 2} \begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{(m+2)(m-1)} \begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

とも計算出来る。

これを使って連立方程式の解を計算すれば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}$$

なので、今求めた逆行列を代入して

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(m+2)(m-1)} \begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{(m+2)(m-1)} \begin{pmatrix} m+1-m-m^2 \\ -1+m(m+1)-m^2 \\ -1-m+(m+1)m^2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{(m+2)(m-1)} \begin{pmatrix} (m+1)(1-m) \\ m-1 \\ (m+1)(m^2-1) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{m+2} \begin{pmatrix} -(m+1) \\ 1 \\ (m+1)^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

が得られる。

$m = 1$ の場合は、3本の方程式は全て同一の方程式 $x + y + z = 1$ であるから、これを解いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (P, R \text{ は任意の実数})$$

である。

$m = -2$ の時は、第1式と第2式を辺々足して

$$-x - y + 2z = -1$$

となる一方で、第3式は

$$-x - y + 2z = -4$$

を意味しており、これを同時に満たす x, y, z は存在しない。従って解はない。

m	解
1, -2 以外	$\frac{1}{m+2} \begin{pmatrix} -(m+1) \\ 1 \\ (m+1)^2 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (P, R \text{ は任意の実数})$
-2	解なし

6. 2次正方行列 G は固有値 2, 5 をもちます。

(1) G は正則である事を証明して下さい。

(2) G^{-1} の固有値を求めて下さい。

配点：各5点 | シラバス達成度目標：(ウ)、(オ)、(キ)

解答例： (1) G が正則でないと仮定すると、

$$|G - 0E| = |G| = 0$$

から G は固有値 0 をもつ。しかし、 G の固有値は 2, 5 であり、固有方程式が2次である事を考えるとこれは矛盾である。従って G は正則である。

(2) $l(\neq 0)$ が G の固有値であるとき、

$$\begin{aligned} 0 &= |G - lE| \\ &= |G^{-1}| |G - lE| \\ &= |G^{-1}(G - lE)| \\ &= |E - lG^{-1}| \\ &= \frac{1}{l^2} |lG^{-1} - E| \\ &= |G^{-1} - \frac{1}{l}E| \end{aligned}$$

が分かり、 G^{-1} は固有値 $\frac{1}{l}$ をもつ。従って、求める固有値は $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ である。