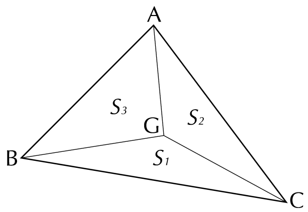
1．三角形 ABC の内部に点 G があって、内部が３つの三角形に分割されています。これらの三角形の面積がそれぞれ、

（$\triangle CGB$ の面積）$= S_1$、（$\triangle AGC$ の面積）$= S_2$、（$\triangle BGA$ の面積）$= S_3$



である時に以下の問いに答えて下さい。

（1）直線 AG が辺 BC と交わる点を D、直線 BG が辺 CA と交わる点を E としたとき、

$$BD : DC = S_3 : S_2 \quad CE : EA = S_1 : S_3 \quad \cdots (*)$$

となる事を証明して下さい。

（2）上の $(*)$ を使って

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \frac{S_2}{S_2+S_3}\overrightarrow{AB} + \frac{S_3}{S_2+S_3}\overrightarrow{AC} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots (\S) \\ \overrightarrow{BE} &= -\overrightarrow{AB} + \frac{S_3}{S_3+S_1}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

となる事を証明して下さい。

（3）上の $(\S)$ を使って点 G の位置ヴェクターが

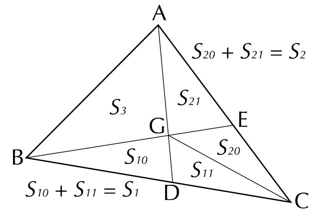
$$\overrightarrow{OG} = \frac{S_1\overrightarrow{OA} + S_2\overrightarrow{OB} + S_3\overrightarrow{OC}}{S_1+S_2+S_3}$$

となる事を証明して下さい。

配点：各 10 点	シラバス達成度目標：ア

解答例

（1）題意の通りに直線 AG を延ばして辺 BC との交点を D とします。



そこで三角形 ABD と三角形 ADC に注目し、それぞれ底辺が BD、DC だと考えれば高さが等しいのでこれらの面積の比は

$$（\triangle ABD \text{ の面積}）:（\triangle ADC \text{ の面積}）= BD : DC$$

です。

一方、三角形 GBD, GDC についても同様に面積比を見ると、こちらも BD、DC をそれぞれの底辺と見た場合に高さが等しいので

$$（\triangle GBD \text{ の面積}）:（\triangle GDC \text{ の面積}）= BD : DC$$

となっています。

と云う事は、これらを辺々引いて、

（$\triangle ABD$ の面積）$-$（$\triangle GBD$ の面積）:（$\triangle ADC$ の面積）$-$（$\triangle GDC$ の面積）$= BD : DC$

となりますので、結局、

$$BD : DC = S_3 : S_2$$

である事が分かります。

全く同様に直線 BG を延ばして辺 CA との交点を E とすると、

$$CE : EA = S_1 : S_3$$

となっています。

（2）上の結果から計算すると

$$\begin{aligned}\vec{AD} =& \vec{AB} + \vec{BD}\\ =& \vec{AB} + \frac{S_3}{S_2+S_3}\vec{BC}\\ =& \vec{AB} + \frac{S_3}{S_2+S_3}\vec{BC}\\ =& \vec{AB} + \frac{S_3}{S_2+S_3}(\vec{AC}-\vec{AB})\\ =& \frac{S_2}{S_2+S_3}\vec{AB} + \frac{S_3}{S_2+S_3}\vec{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{BE} =& \vec{BA} + \vec{AE}\\ =& -\vec{AB} + \frac{S_3}{S_1+S_3}\vec{AC}\end{aligned}$$

となります。

（3）ここで

$$\vec{AG} = l\vec{AD}, \quad \vec{BG} = m\vec{BE}$$

とおけば、

$$\begin{aligned}\vec{AG} =& l\vec{AD}\\ =& \frac{S_2 l}{S_2+S_3}\vec{AB} + \frac{S_3 l}{S_2+S_3}\vec{AC}\end{aligned}$$

である一方、

$$\begin{aligned}\vec{AG} =& \vec{AB} + \vec{BG}\\ =& \vec{AB} + m\vec{BE}\\ =& \vec{AB} + m(-\vec{AB} + \frac{S_3}{S_1+S_3}\vec{AC})\\ =& (1-m)\vec{AB} + \frac{S_3 m}{S_1+S_3}\vec{AC}\end{aligned}$$

でもあるため、連立方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{S_2 l}{S_2+S_3} = 1-m\\[2ex] \dfrac{S_3 l}{S_2+S_3} = \dfrac{S_3 m}{S_1+S_3}\end{cases}$$

が得られます。これを整理して行列の形に書けば、

$$\begin{pmatrix} S_2 & S_2+S_3\\ S_1+S_3 & -(S_2+S_3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l\\ m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2+S_3\\ 0\end{pmatrix}$$

となるので、これを解いて

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} l\\ m\end{pmatrix} =& \begin{pmatrix} S_2 & S_2+S_3\\ S_1+S_3 & -(S_2+S_3)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} S_2+S_3\\ 0\end{pmatrix}\\ =& \frac{1}{S_1+S_2+S_3}\begin{pmatrix} S_2+S_3 & S_2+S_3\\ S_1+S_3 & -S_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}\\ =& \frac{1}{S_1+S_2+S_3}\begin{pmatrix} S_2+S_3\\ S_1+S_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります。これを戻してやれば、結局、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} =& l\overrightarrow{AD}\\ =& \frac{S_2}{S_1+S_2+S_3}\overrightarrow{AB}+\frac{S_3}{S_1+S_2+S_3}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA} =& \frac{S_2}{S_1+S_2+S_3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{S_3}{S_1+S_2+S_3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\ \overrightarrow{OG} =& \frac{S_1\overrightarrow{OA}+S_2\overrightarrow{OB}+S_3\overrightarrow{OC}}{S_1+S_2+S_3}\end{aligned}$$

となって題意は証明されます。

2．行列 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\2&4&7\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えて下さい：

（1）逆行列をヴェクターの外積を使って計算して下さい。

（2）逆行列を掃き出し法によって計算して下さい。

配点：各10点	シラバス達成度目標：イ、ウ、カ

解答例

（1）行列を３本の縦ヴェクターに分解して２本ずつの外積を計算すると、

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3&4\\4&7\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&3\\4&7\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}4&1\\7&2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3&1\\7&2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&1\\4&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

であり、また３重積は

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}=1$$

であるので、求める逆行列は

$$\begin{pmatrix}5&-2&-1\\1&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

である。

（２）掃き出し法によって計算すれば

1 2 3			1	0	0	(1)
1 3 4			0	1	0	(2)
2 4 7			0	0	1	(3)
1 2 3			1	0	0	(1)
0 1 1			-1	1	0	$(2)-(1)=(4)$
0 0 1			-2	0	1	$(3)-2(1)=(5)$
1 0 1			3	-2	0	$(1)-2(4)=(6)$
0 1 1			-1	1	0	(4)
0 0 1			-2	0	1	(5)
1 0 0			5	-2	-1	$(6)-(5)$
0 1 0			1	1	-1	$(4)-(5)$
0 0 1			-2	0	1	(5)

となって求める逆行列は

$$\begin{pmatrix}5&-2&-1\\1&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

である。

３． 次の行列式を計算して下さい。

（１）$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 18 & 2 & 8 \\ 6 & -4 & 3 & -2 \\ 9 & 13 & 4 & 7 \end{vmatrix}$　　（２）$\begin{vmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

配点：各10点	シラバス達成度目標：オ

解答例

（１）

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 9 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 18 & 2 & 8 \\ 6 & -4 & 3 & -2 \\ 9 & 13 & 4 & 7 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 18 & 2 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & 13 & 4 & 7 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 18 & 2 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 18 & 2 & 8 \\ -4 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

（２）

$$\begin{vmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 6 \\ 6 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

４． 次の行列式を因数分解して下さい。

（１） $\begin{vmatrix} a+f & a+g & a+h \\ b+f & b+g & b+h \\ c+f & c+g & c+h \end{vmatrix}$ 　　（２） $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^3 & p^4 \end{vmatrix}$

配点：各 10 点	シラバス達成度目標：オ

解答例

（１）

$$\begin{vmatrix} a+f & a+g & a+h \\ b+f & b+g & b+h \\ c+f & c+g & c+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f-g & a+g & h-g \\ f-g & b+g & h-g \\ f-g & c+g & h-g \end{vmatrix} = 0$$

（２）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^3 & p^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & p-1 & p^2-1 \\ 1 & p^3-1 & p^4-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p-1 & p^2-1 \\ p^3-1 & p^4-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} p-1 & p^2-1 \\ p^3-p & p^4-p^2 \end{vmatrix}$$

$$= (p-1)p(p^2-1) \begin{vmatrix} 1 & p+1 \\ 1 & p \end{vmatrix}$$

$$= -p(p+1)(p-1)^2$$

５． 行列 $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、$M - xE$ が正則でない様な x の値を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス達成度目標：ウ、オ

解答例

$M - xE$ の行列式が 0 となる様な x を求めれば良い。

$$|M - xE| = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ 6 & -1-x & 0 \\ 6 & -2 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ 6 & -1-x & 0 \\ 6-(1-x)(2-x) & -2+(1-x) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & -1-x \\ 6-(1-x)(2-x) & -2+(1-x) \end{vmatrix}$$

$$= -(1+x) \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 6-(1-x)(2-x) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1+x)(1-x)(2-x)$$

となるので、この行列式が 0 となるのは $x = -1, 1, 2$ の時である。