

1. 次の方程式について、以下の問いに答えて下さい：

$$x^2 - 7y^2 = 1$$

(1) $1 < x < 10, 1 < y < 10$ の範囲内にこの方程式の整数解が一つあります。それを探して下さい。

(2) (1) で求めた解を $(x, y) = (m, n)$ とします。このとき、点 $(m, -n)$ を点 $(1, 0)$ に移し、また点 $(1, 0)$ を点 (m, n) に移す一次変換の表現行列を求めて下さい。

(3) 問題の方程式の正の整数解をもう一組求めて下さい。

配点：(1) 10点、(2) 6点、(3) 5点	シラバス達成度目標：ウ、エ
--------------------------	---------------

解答例

(1) $(x, y) = (8, 3)$

(2) 求める行列を M と置けば、

$$M \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

なので、これを併せて書けば

$$M \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、これを解けば

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -24 & -63 \\ -9 & -24 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。

(3)

$$\begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127 \\ 48 \end{pmatrix}$$

であるが、

$$127^2 - 7 \cdot 48^2 = 16129 - 16128 = 1$$

により、 $(x, y) = (127, 48)$ は問題の方程式の正の整数解である。

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -p^2 & 3 \end{pmatrix}$ ($p > 0$) について以下の問いに答えて下さい:

(1) 2つの異なる固有値 w_1, w_2 を求めて下さい。

(2) (1) で求めた固有値 w_j に対応した固有ベクトルを $\mathbf{u}_j$ ($j = 1, 2$) とした時、 $\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ が直交するための p の条件を求めて下さい。

配点：(1) 10点、(2) 8点 シラバス達成度目標：イ、キ

解答例

(1) 固有値は固有方程式 $|A - lE| = 0$ の実数解であるからこの方程式を詳しく見ると、

$$\begin{aligned} |A - lE| &= 0 \\ \begin{vmatrix} 3-l & -1 \\ -p^2 & 3-l \end{vmatrix} &= 0 \\ (3-l)^2 - p^2 &= 0 \\ l - 3 &= \pm p \\ l &= 3 \pm p \end{aligned}$$

となっており、結局固有値は $3 \pm p$ の2つである。

(2) 固有値 $3 \pm p$ に対応した固有ベクトルを求める。それには

$$A\mathbf{x} = (3 \pm p)\mathbf{x}$$

すなわち

$$\{A - (3 \pm p)E\}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となる様なベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めれば良いが、それは結局連立方程式：

$$\begin{cases} \mp px - y = 0 \\ -p^2 x \mp py = 0 \end{cases}$$

を解く事に帰着される。

この2式は明らかに同一の式であり、2変数に対して1本しか式がないため x を諦める事にすれば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \mp px \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \mp p \end{pmatrix}$$

と書けるので、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ \mp p \end{pmatrix}$ である(複号同順)。

従って問題の様にこの2本の固有ベクトルが直交するとすると、

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -p \end{pmatrix} = 1 - p^2$$

であるから、結局 $p = 1$ でなければならない事が分かる。

3. 次の連立方程式の解を掃き出し法で求めて下さい。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 16 \\ 5x + 7y + 8z = 29 \end{cases}$$

配点：10点 | シラバス達成度目標：力

解答例

1	2	3	4	(1)
3	4	5	16	(2)
5	7	8	29	(3)
1	2	3	4	(1)
0	-2	-4	4	(2) - 3(1) = (4)
0	-3	-7	9	(3) - 5(1) = (5)
1	2	3	4	(1)
0	1	2	-2	$-\frac{1}{2}(4) = (6)$
0	-3	-7	9	(5)
1	0	-1	8	(1) - 2(6) = (7)
0	1	2	-2	(6)
0	0	-1	3	(5) + 3(6) = (8)
1	0	-1	8	(7)
0	1	2	-2	(6)
0	0	1	-3	$-(8) = (9)$
1	0	0	5	(7) + (9)
0	1	0	4	(6) - 2(9)
0	0	1	-3	(9)

となって求める解は $(x, y, z) = (5, 4, -3)$ である。

4. 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めて下さい。

配点：15点 | シラバス達成度目標：オ、キ

解答例

固有値を求めるには固有方程式を解けば良い。

この行列の固有方程式は $|B - xE| = 0$ であるからこれを計算すると、

$$\begin{aligned} 0 &= |B - xE| \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)\{(1-x)^2 - 1\} \\ &= (1-x)(x^2 - 2x) \\ &= (1-x)x(x-2) \end{aligned}$$

となるため、その解、即ち固有値は $0, 1, 2$ である。

5. 行列 $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $0, 1, 3$ である事が分かっています。それぞれの固有値に対応した固有ベクトルを求めて下さい。

配点：21点 シラバス達成度目標：キ

解答例

固有値0について：固有値0に関する固有ベクトル $\mathbf{x}$ は $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ すなわち

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる様なベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ であるから、この連立方程式を解けば良い。

係数行列は正則ではないので3本ある様に見えて実質的には2本の式である。そこで第2、3式を使って y, z を x で表すと

$$y = -x, \quad z = x$$

であるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

固有値1について：固有値0に関する固有ベクトル $\mathbf{x}$ は $C\mathbf{x} = \mathbf{x}$ すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる様なベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ であるから、この連立方程式を解けば良い。

明らかに第2、3式は同じ式であって、 $x = 0$ が分かる。そこで第1式を使って y を z で表すと

$$y = z$$

であるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

固有値3について：固有値0に関する固有ベクトル $\mathbf{x}$ は $C\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ すなわち

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる様なベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ であるから、この連立方程式を解けば良い。

係数行列は正則ではないのでこの式は実質2本であって、例えば第2、3式を使って y, z を x で表すと

$$y = \frac{1}{2}x, \quad z = -\frac{1}{2}x$$

であるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{2}x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となって求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である。

配点：(1) 10点、(2) 5点	シラバス達成度目標：ア
-------------------	-------------

解答例

(1) 図に従って計算すると

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BD} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{7} \vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{7} (\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= \frac{5}{7} \vec{AB} + \frac{2}{7} \vec{AC} \end{aligned}$$

となるので、成分計算すると

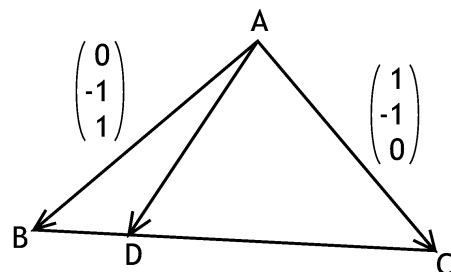
$$\begin{aligned} &= \frac{5}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

6. 以下に挙げるベクトルはいずれも行列 $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルである事が分かっています：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(1) 下図の辺 BC を $BD : DC = 2 : 5$ に内分する点を D とした時、ベクトル $\vec{AD}$ を求めて下さい。



(2) $F^{-1}DF$ が対角行列になる様な正則行列 F を求めて下さい。

(2)

$$D \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

以上の計算と(1)の結果から最初の4つのベクトルはいずれも固有値3に関する固有ベクトルであり、最後の1つのみが固有値-3に関する固有ベクトルとなっている。

そこで、固有値3に関する固有ベクトルから2本と固有値-3に関する固有ベクトル1本をとって

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすればこれは正則であるはずである。実際、

$$|F| = -1 - 1 + 0 - 1 - 0 - 0 \neq 0$$

であるから正則である。

更に固有ベクトルの性質から

$$\begin{aligned} DF &= D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & D \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & 3F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & -3F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & F \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} & F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= F \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ F^{-1}DF &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって、題意を満たしている。