

1. $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい:

(1) 辺 BC を 2:1 に内分する点を D とした時、ベクトル $\vec{AD}$ をベクトル $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

(2) 辺 CA を 3:5 に内分する点を E とし、線分 BE と線分 AD の交点を F とします。この時点 F の位置ベクトル $\vec{OF}$ を 3 頂点の位置ベクトル $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。

配点: (1) 12 点、(2) 8 点 シラバス達成度目標: ア、イ

解答例

(1)

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BD} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}\end{aligned}$$

(2) ベクトル $\vec{AF}$ はベクトル $\vec{AD}$ の定数倍ですから、仮に $\vec{AF} = m\vec{AD}$ とおけば、(1) の結果から

$$\vec{AF} = \frac{m}{3}\vec{AB} + \frac{2m}{3}\vec{AC} \quad \dots (*)$$

である事が分かります。また、ベクトル $\vec{BF}$ はベクトル $\vec{BE}$ のやはり定数倍ですので、 $\vec{BF} = n\vec{BE}$ とおいて此れを変形すれば

$$\begin{aligned}\vec{BA} + \vec{AF} &= n(\vec{BA} + \vec{AE}) \\ \vec{AF} &= (1-n)\vec{AB} + n\vec{AE} \\ &= (1-n)\vec{AB} + \frac{5n}{8}\vec{AC} \quad \dots (**)\end{aligned}$$

計算は初めているが、少しの変形をしただけのものは 2 点

ベクトルを 2 通りに表すなど多少は意味のある計算が出来ていれば 3 点

です。従って、(*) と (**) 式によれば

$$\begin{aligned}\frac{m}{3}\vec{AB} + \frac{2m}{3}\vec{AC} &= (1-n)\vec{AB} + \frac{5n}{8}\vec{AC} \\ \left(\frac{m}{3} + n - 1\right)\vec{AB} &= \left(-\frac{2m}{3} + \frac{5n}{8}\right)\vec{AC}\end{aligned}$$

となるのですが、 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ は平行ではなく、両辺の係数は 0 である事、即ち連立方程式:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}m + n = 1 \\ -\frac{2}{3}m + \frac{5}{8}n = 0 \end{cases}$$

が得られます。第 1 式の 2 倍と第 2 式を足せば

$$\frac{21}{8}n = 2 \quad \text{すなわち、} \quad n = \frac{16}{21}$$

となってこれを (**) に戻してやれば

$$\begin{aligned}\vec{AF} &= \frac{5}{21}\vec{AB} + \frac{10}{21}\vec{AC} \\ \vec{AO} + \vec{OF} &= \frac{5}{21}(\vec{AO} + \vec{OB}) + \frac{10}{21}(\vec{AO} + \vec{OC}) \\ \vec{OF} &= \frac{6}{21}\vec{OA} + \frac{5}{21}\vec{OB} + \frac{10}{21}\vec{OC}\end{aligned}$$

である事が分かります。

計算ミスが複数あるものは 4 点

計算ミス 1 個のみのものは 6 点

より深刻な考え方のミスがあるものは 5 点

2. 次の行列の計算をして下さい:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} (a \ b \ c) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) (\vec{v} \ \vec{w}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし、 $\vec{v}, \vec{w}$ は2次元の縦ベクターであるとし、これを左右に2つ並べて数字(成分)だけに着目すると2次の正方行列と見なす事が出来ると考えます。

配点：(1) 12点、(2) 8点、(3) 10点 | シラバス達成度目標：ウ

解答例

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

問題の書き間違いなど
単純なミスは 8点

一方の成分だけ合っ
ているものは 6点

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} (a \ b \ c) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} (5a + 3b - c)$$

$$= \begin{pmatrix} 5a + 3b - c \\ 0 \\ -10a - 6b + 2c \end{pmatrix}$$

2回の積の一方が
正しければ 3点

(3)

$$\left((\vec{v} \ \vec{w}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\vec{v} \ \vec{w}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{v} \ \vec{w}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{v} \ \vec{w})$$

より、

$$(\vec{v} \ \vec{w}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

である。

3. 平面内での角度 θ の回転行列を $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とするとき、

(1) ${}^tRR = E$ である事を証明して下さい。

(2) 任意の2次元縦ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して $R\vec{a} \cdot R\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ であることを証明して下さい。

配点：(1) 10点、(2) 8点 シラバス達成度目標：ウ、カ

解答例

(1)

$$\begin{aligned} {}^tRR &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= E \end{aligned}$$

内積の定義や転置の計算など基本的なところでミスのあるものは3点

(2)

$$R\vec{a} \cdot R\vec{b} = {}^t(R\vec{a})R\vec{b} = {}^t\vec{a}{}^tRR\vec{b} = {}^t\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

4. 行列 $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めて下さい。

配点：12点 シラバス達成度目標：ウ、オ

解答例 掃き出し法で計算する：

7	2	6	1	0	0	(1)
6	2	5	0	1	0	(2)
9	5	7	0	0	1	(3)
7	2	6	1	0	0	(1)
6	2	5	0	1	0	(2)
2	3	1	-1	0	1	(3)-(1)=(4)
1	0	1	1	-1	0	(1)-(2)=(5)
6	2	5	0	1	0	(2)
2	3	1	-1	0	1	(4)
1	0	1	1	-1	0	(5)
2	-4	3	2	1	-2	(2)-2(4)=(6)
2	3	1	-1	0	1	(4)
1	0	1	1	-1	0	(5)
0	-4	1	0	3	-2	(6)-2(4)=(7)
0	3	-1	-3	2	1	(4)-2(1)=(8)
1	0	1	1	-1	0	(5)
0	-1	0	-3	5	-1	(7)+(8)=(9)
0	3	-1	-3	2	1	(8)
1	0	1	1	-1	0	(5)
0	-1	0	-3	5	-1	(9)
0	0	-1	-12	17	-2	(8)+3(9)=(10)
1	0	0	-11	16	-2	(5)+(10)=(12)
0	1	0	3	-5	1	-(9)=(11)
0	0	-1	-12	17	-2	(10)
1	0	0	-11	16	-2	(12)
0	1	0	3	-5	1	(11)
0	0	1	12	-17	2	-(10)

掃き出し法のやり方が基本的に間違っているものは2点

外積を使って計算した場合：

1つの外積のミスのみ
8点

行列式に相当する部分の計算を行っていないもの
-2点

転置だけし忘れたもの
-2点

外積法による逆行列の公式のミス -4点

従って求める逆行列は $\begin{pmatrix} -11 & 16 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 12 & -17 & 2 \end{pmatrix}$ である。

5. 次の行列式を計算して下さい。

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 6 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

配点：(1) 10点、(2) 10点 | シラバス達成度目標：エ

解答例

(1)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -16 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -16 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3(60 + 48) = 324 \end{aligned}$$

計算ミスのあるもの
6点

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$