

1. $\triangle ABC$ の辺 BC 上に点 D があり、 $\triangle ABD$ と $\triangle ADC$ の面積がそれぞれ 3, 5 であるとき、ベクトル $\overrightarrow{AD}$ をベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ で表して下さい。

配点：15点 シラバス達成度目標：ア、イ

解答例

$\triangle ABD$ と $\triangle ADC$ の底辺をそれぞれ BD, DC と考えるとこれら2つの三角形は高さが等しい。従って面積比はそのまま底辺の長さの比となるので

$$BD : DC = 3 : 5$$

である事が分かる。

根拠を示していないもの - 4点

根拠の記述が弱いもの - 2点

従って、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{5}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

が得られる。

全く計算せずに答えているもの - 5点

計算ミス - 5点

2. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 9 \\ 4 & 13 & 11 \end{pmatrix}$ の逆行列を掃き出し法で求めて下さい。

配点：15点 シラバス達成度目標：オ

解答例

1	3	2	1	0	0	(1)
2	8	9	0	1	0	(2)
4	13	11	0	0	1	(3)
1	3	2	1	0	0	(1)
0	2	5	-2	1	0	(2)-2(1)=(4)
0	1	3	-4	0	1	(3)-4(1)=(5)
1	3	2	1	0	0	(1)
0	1	3	-4	0	1	(5)
0	2	5	-2	1	0	(4)
1	0	-7	13	0	-3	(1)-3(5)=(6)
0	1	3	-4	0	1	(5)
0	0	-1	6	1	-2	(4)-2(5)=(7)
1	0	-7	13	0	-3	(6)
0	1	3	-4	0	1	(5)
0	0	1	-6	-1	2	-(7)=(8)
1	0	0	-29	-7	11	(6)+7(8)
0	1	0	14	3	-5	(5)-3(8)
0	0	1	-6	-1	2	(8)

従って求める逆行列は $\begin{pmatrix} -29 & -7 & 11 \\ 14 & 3 & -5 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ である。

ミスのあるもの
●形式的にきちんとやっていて計算ミスしたもの

ミスが少ない：12点
ミスが多い：10点
雑にやっているもの - 2点

●そもそもやり方がおかしいもの 5点

3. 次の計算をして下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

配点：各 10 点 シラバス達成度目標：ウ

解答例

(1) 積が定義出来ないため計算不可能。

これ以外の解答不可

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

行列の積と勘違いしたもの 2 点

計算ミス - 4 点

外積の定義ミス - 4 点

たすき掛けでやって因数分解出来なかったもの 4 点

途中で放棄してあるもの 2 点 ~ 6 点

計算ミスが
少ないもの：7 点
多いもの：4 点

$$4. \text{ 行列式 } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \text{ を因数分解して下さい。}$$

配点：10 点 シラバス達成度目標：エ

解答例

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ bc & ca-bc & ab-bc \end{vmatrix}$$

(1) (2) (3) (1) (2) - (1) (3) - (1)

$$= (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ a^2 & -a-b & c+a \\ bc & c & -b \end{vmatrix}$$

(1) (4) (5)

$$= (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ a^2 & c-b & c+a \\ bc & c-b & -b \end{vmatrix} \begin{matrix} (6) \\ (7) \\ (8) \end{matrix}$$

(1) (4) + (5) (5)

$$= (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ a^2-bc & 0 & a+b+c \\ bc & c-b & -b \end{vmatrix} \begin{matrix} (6) \\ (7)-(8) \\ (8) \end{matrix}$$

$$= (a-b)(c-a)(c-b)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2-bc & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

5. 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を求めて下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：キ

解答例

固有値は固有方程式の解であるからこの行列の固有方程式を解けば良い。

$$\begin{aligned}
 0 &= \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 5-x & 1 & 1 \\ 5-x & 3-x & 1 \\ 5-x & 1 & 3-x \end{vmatrix} \\
 &= (5-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} \\
 &= (5-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} \\
 &= (5-x)(2-x)^2
 \end{aligned}$$

したがって固有値は 2, 5 である。

計算ミスは - 4 点
些細なミスは - 1 点

6. 行列 $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ で表現される一次変換を考えます。

点 $P_0(6, 0)$ をこの一次変換で移した点を P_1 とし、更にこの点 P_1 を同じ一次変換で移した点を P_2 とします：

$$\begin{aligned}
 \vec{OP_1} &= M\vec{OP_0} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \vec{OP_2} &= M\vec{OP_1} = M^2\vec{OP_0}.
 \end{aligned}$$

同様に続ける事によって点列 $\{P_n\}$ が得られ、点 P_n の位置ベクトル $\vec{OP_n}$ は

$$\vec{OP_n} = M\vec{OP_{n-1}} = \cdots = M^n\vec{OP_0}$$

となりますが、

(1) 行列 M の固有値・固有ベクトルを求めて下さい。

(2) 行列 M を対角化し、 M^n を求めて下さい。

(3) 点 P_n の座標を求めて下さい。

(4) この点列は収束するでしょうか？するかしないか答え、更に収束する場合には極限点も求めて下さい。収束しない場合にはしない理由も述べて下さい。

配点：(1) 10 点、(2) 10 点、(3)、(4) 合わせて 5 点

シラバス達成度目標：カ、キ、ク

解答例

(1) M の固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \frac{5}{6} - x & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} - x \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{36} \{(5 - 6x)(4 - 6x) - 2\} \\ 0 &= 36x^2 - 54x + 18 \\ &= 2x^2 - 3x + 1 \\ &= (2x - 1)(x - 1) \end{aligned}$$

となるため、固有値は $1, \frac{1}{2}$ である。

次に固有ベクトルを求める。

固有値 1 について: $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めれば良い

が、これは変形して $(M - E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから連立方程式:

$$\begin{cases} \frac{1}{6}(-x - y) = 0 \\ \frac{1}{6}(-2x - 2y) = 0 \end{cases}$$

を解けばよく、明らかに $y = -x$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となって求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である。

固有値 $\frac{1}{2}$ について: $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めれば良

いが、これは変形して $(M - \frac{1}{2}E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから連立方程式:

$$\begin{cases} \frac{1}{6}(2x - y) = 0 \\ \frac{1}{6}(-2x + y) = 0 \end{cases}$$

を解けばよく、明らかに $y = 2x$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となって求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である。

固有値が間違っている場合

- そもそも固有方程式が間違っていた: 4 点
- 計算ミス: 5 点

固有値は合っているが固有ベクトルが間違っている場合は、6 点 ~ 8 点

(2) 固有ベクトルを並べて得られる行列を P とすると：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

これは正則であり、

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ここまでのみの
もの 3点

である。このとき、

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって M は対角化される。

また、この最後の式から

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) でのミスがある場合、

- 対角化まで一応やっていれば3点
- 途中で放棄してあれば1点～2点

であるので

$$\begin{aligned} M &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} P^{-1} \\ M^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2^n} & -1 + \frac{1}{2^n} \\ -2 + \frac{2}{2^n} & 1 + \frac{2}{2^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この具体的
計算のな
いもの
- 3点

計算ミスは
- 2点

となって M^n が求まった。

(3) 問題文にある通り、点 P_n の位置ベクトルは

$$\vec{OP}_n = M^n \vec{OP}_0$$

で与えられるため、今求めた結果より、

$$\begin{aligned} \vec{OP}_n &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2^n} & -1 + \frac{1}{2^n} \\ -2 + \frac{2}{2^n} & 1 + \frac{2}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 + \frac{2}{2^n} \\ -4 + \frac{4}{2^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

それ以前のミスがあっ
ても、それなりに正しく結論
出来ていれば2点

となる事が分かる。

(4) $n \rightarrow \infty$ の極限を考えると、各座標は収束しているのでこの点列は収束し、極限点は $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ である。



それ以前のミスがあっても正しく推論されていれば1点