

1 条件付きの極値問題 その1 ローカルな1変数化

1.1 1変数の極値問題の復習

定義 1.1 [狭義の極値] a を内部に含むある領域で定義された関数 f が、 a の十分近く (正確には、 a を含むある開区間内) で『 $x \neq a$ ならば $f(a) < f(x)$ 』を満たしているとき、 f は a で狭義の極小値 (strict local minimum) をとると言います。

同様に、関数 f が a の十分近くで『 $x \neq a$ ならば $f(a) > f(x)$ 』を満たしているとき、 f は a で狭義の極大値 (strict local maximum) をとると言います。

定義 1.2 [広義の極値] a を内部に含むある領域で定義された関数 f が、 a の十分近くで $f(a) \leq f(x)$ を満たしているとき、 f は a で (広義の) 極小値 (local minimum) をとると言います。

同様に、関数 f が a の十分近くで $f(a) \geq f(x)$ を満たしているとき、 f は a で (広義の) 極大値 (local maximum) をとると言います。

単に『極値』と言う場合は、広義の極値も含めっていると考えた方が良いでしょう。

事実 1.3 [候補点の選定] $f(x)$ が極値をとる点は、以下の2種類の点の中にしかありません：

- (i) 微分可能であって $f'(x) = 0$ を満たす点。
- (ii) 微分不可能な点。

事実 1.4 [2階微分による判定] $f(x)$ は C^2 -級とします。

$$\left\{ \begin{array}{ll} f'(a) \neq 0 & \cdots \text{ 極値ではない (広義の極値ですらない)} \\ f'(a) = 0 & \cdots \left\{ \begin{array}{ll} f''(a) > 0 & \cdots \text{ (狭義の) 極小値} \\ f''(a) < 0 & \cdots \text{ (狭義の) 極大値} \\ f''(a) = 0 & \cdots \text{ 不明} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

例題 1.5 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ の極値を求めて下さい。

$f(x)$ は任意の点で微分可能です。

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2), \quad f''(x) = 6x - 6$$

によれば

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$$

であり、

$$f''(0) = -6 < 0, \quad f''(2) = 6 > 0$$

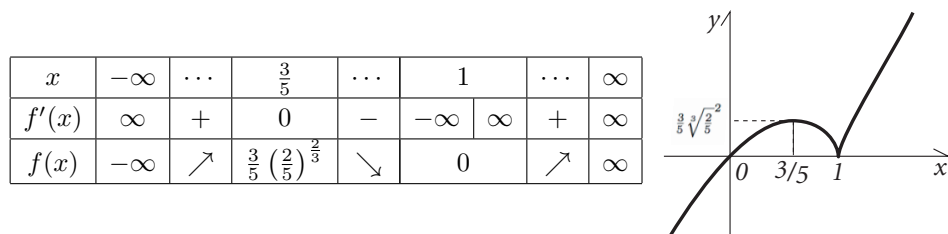
ですから、関数 $f(x)$ は $x = 0$ において極大値 $f(0) = 4$ 、 $x = 2$ において極小値 $f(2) = 0$ をとります。□

基本演習 1 関数 $f(x) = x(1-x)^{\frac{2}{3}}$ の極値を求めて下さい。

【解答例】

$$f'(x) = (1-x)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x(1-x)^{-\frac{1}{3}}(-1) = \frac{1-x-\frac{2}{3}x}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3-5x}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}}$$

ですから $f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{3}{5}$ のときのみですが、 $x = 1$ で微分不可能であり、この点でも極値である可能性が残されています。そこで増減表・グラフを描くと以下の通りになります：



従って $x = \frac{3}{5}$ のとき y は極大値 $\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{\frac{2}{3}}$ であり、 $x = 1$ のとき極小値 0 である事が分かります。□

1.2 問題設定

x, y が条件 (constraint) $G(x, y) = 0$ を満たしながら変化するとき、関数 $F(x, y)$ の極値・最大値・最小値を求めたい。

人間は古くから様々な最大値、最小値に関心をもって来ましたが、多くの場合、関連する要素は何らかの相互関係や制約条件 (constraints) を満たしておらねばならず、その条件の範囲内で最大値、最小値などを求める事が現実的な問題となります。

何の条件もなしに自由に行動できる事は稀であり、むしろ制限があるからこそ意味があると言えるかも知れません。

定義 1.6 条件 $G(x, y) = 0$ を満たす点 (a, b) において、この点のごく近くにおいて条件 $G(x, y) = 0$ を満たす任意の点 (x, y) について

$$F(a, b) \leq F(x, y)$$

が成り立つとき、関数 $F(x, y)$ は点 (a, b) において条件 $G(x, y) = 0$ のもとでの極小値をとると言います (条件付きの極大値も全く同様です)。

これは所謂『広義の極値』式の定義であって、これに従うと定数関数は任意の点で極小かつ極大になります。もちろんこうした解釈を嫌って『狭義の極値』式の定義を採用する場合もあるでしょう。その場合は近くの条件を満たす点のうち『点 (a, b) 以外のもの』について等号のない $F(a, b) < F(x, y)$ が成立する事と定義します。

1.3 簡単に 1 変数に帰着できる場合

問題 1.7 $x + y = 1$ のときに $3x^2 + y^2$ の最小値を求めて下さい。

先の問題設定の書式に合わせるなら

$$G(x, y) = x + y - 1, \quad F(x, y) = 3x^2 + y^2$$

です。この場合は条件式 $G(x, y) = 0$ から $y = 1 - x$ と書けますのでこれを関数 $F(x, y)$ の式の y のところに代入した関数を考えます：

$$H(x) = F(x, y(x)) = F(x, 1 - x) = 3x^2 + (1 - x)^2.$$

$x + y = 1$ を満たすような x, y は、まず x を自由に決定し、次いでそれに応じて y の値を決める事が出来るので、 $x + y = 1$ を満たす全ての x, y について $F(x, y)$ の値を考える事は、全ての x について $H(x)$ の値を見る事と同じ事になります。これは微分可能な 1 変数関数ですから、導関数を使うなどして極値を求める事が出来ます ($x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$)。□

基本演習 2 $x + y = 1$ のとき $F(x, y) = xy^2 + x^2 - 2x - y$ の極値を求めてください。

条件式より $y = 1 - x$ なので、これを関数に代入して、任意の実数 x に対して

$$f(x) = F(x, 1 - x) = x(1 - x)^2 + x^2 - 2x - (1 - x) = x^3 - x^2 - 1$$

の極値を求めれば良いことが分かります。

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2), \quad f''(x) = 6x - 2$$

ですから極値の候補点は $x = 0, \frac{2}{3}$ であり、

$$f''(0) = -2 < 0, \quad f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$$

から $x = 0, y = 1$ で極大値 -1 、 $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}$ のとき極小値 $-\frac{31}{27}$ をとることが分かります。□

条件式の表す曲線のパラメータ表示を使って 1 変数化出来る場合もあります。

基本演習 3 $x^2 + y^2 = 4$ のときに、 $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ ($0 \leq t < 2\pi$) として t の 1 変数関数に変形する方法で $F(x, y) = x + y$ の極値を求めてください。

$$V(t) = F(2 \cos t, 2 \sin t) = 2 \cos t + 2 \sin t$$

とにおいてこの 1 変数関数の極値を求めます。

$$V'(t) = -2\sin t + 2\cos t, \quad V''(t) = -2\cos t - 2\sin t$$

ですから、 $V'(t) = 0$ となるのは $\cos t = \sin t$ のときであり、従って $t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ です。

$$V''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} < 0, \quad V''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} > 0$$

によれば $t = \frac{\pi}{4}$ のとき、すなわち、 $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ のとき極大値 $2\sqrt{2}$ 、 $t = \frac{5\pi}{4}$ のとき、すなわち、 $(x, y) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ のとき極小値 $-2\sqrt{2}$ をとります。□

1.4 (簡単には) 1 変数に帰着できない場合

問題 1.8 $x^2 + 2xy - y^2 = -1$ のときに $x - y$ の極値を求めて下さい。

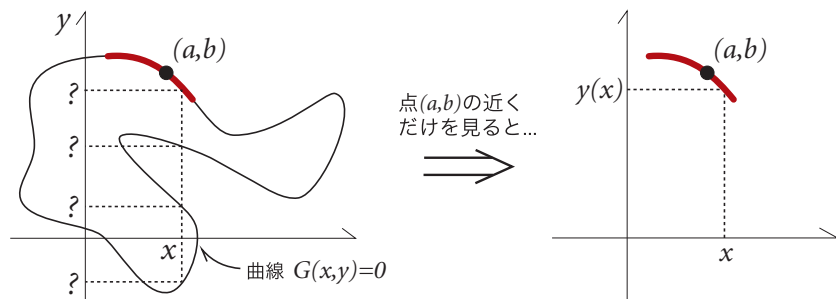
やはり書式を合わせるために

$$G(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 1, \quad F(x, y) = x - y$$

としておきます。形式的にはさっきの問題と全く同じですから同じ方法で求めてみようと思うのですが、条件式が複雑なために $y = y(x)$ の形に出来ません。

1.4.1 ローカルな 1 変数化

例えば条件式 $G(x, y) = 0$ の表すなめらかな曲線が下図左のようになっていたとしましょう。曲線全体を俯瞰してみるともの凄く複雑な曲線になっていて、 x 座標を指定しても曲線上には対応する点は複数あり、 y 座標はただ 1 つには定まりません。要するにこの曲線全体で (グローバルに) 通用する y を x で表した関数は存在しません。



しかし、よくよく考えてみれば極値と云うのはローカルな意味での最大値／最小値の事ですから、ある点で極値かどうかと云うことに関係するのはその点の近くの様子だけであって、関数の値が遠い所でどうなっているようが関係ありません。そこで曲線上の点 (a, b) の近くだけを抜き出して眺めてみましょう (図右)。

どうでしょう。この部分だけを見ればかなり単純な曲線になっていて、1 つ x の値を定めればそれに応じてただ 1 つの y の値が確定します。つまりローカルには y は x の関数になっているようです。それを $y = y(x)$ と書くことにすれば、点 (a, b) で関数 $F(x, y)$ が件の条件下での極値であるかどうかは、

$$H(x) = F(x, y(x))$$

と置いて、これが $x = a$ で極値かどうか判定すれば良いと云う事になります。

1.4.2 具体的な判定手順

まず次のことに注意します。曲線 $G(x, y) = 0$ 上で y が x の (微分可能な) 関数 $y = y(x)$ として書けているような部分では ($y(x)$ の具体的な関数の形はどうであれ)

$$0 = G(x, y(x)) = x^2 + 2xy(x) - y(x)^2 + 1$$

が成り立っており (曲線とグラフが一致)、この両辺を x で微分すれば

$$0 = 2x + 2y(x) + 2xy'(x) - 2y(x)y'(x)$$

$$\{y(x) - x\}y'(x) = x + y(x)$$

です (やはり $y(x)$ の具体的な形はどうであれ、です)。しかし

$$G(x, x) = 2x^2 + 1 \neq 0$$

ですから、曲線 $G(x, y) = 0$ 上には $y = x$ を満たすような点はありませんので $y(x) - x \neq 0$ であって結局 ($y(x)$ の具体的な形は知らないに関わらず)

$$y'(x) = \frac{x + y(x)}{y(x) - x}$$

であることが分かります。すると $H(x) = F(x, y(x))$ と置いて微分計算して

$$H'(x) = F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x) = 1 + \frac{x + y(x)}{x - y(x)} = \frac{2x}{x - y(x)}$$

ですから、 $H'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみであり、このとき曲線上では $y = \pm 1$ です。従って極値の候補点は 2 点 $(0, \pm 1)$ です。

更に 2 階微分を計算しましょう。2 階微分を計算すべき点は 2 つあり、そのそれぞれの近くで y を x で表した時の $y(x)$ は異なる可能性もあるわけですから、これを使って定義される $H(x)$ も本来異なる可能性があります、いちいち記号を変えるのも面倒なので同じ記号で表していることに注意してください。

$$H''(x) = \frac{2(x - y(x)) - 2x(1 - y'(x))}{(x - y(x))^2} = \frac{-2y + 2xy'(x)}{(x - y(x))^2}$$

ですが、2 階微分は 2 点 $(0, \pm 1)$ での値にしか興味がありませんので、これ以上 y' の部分を計算したところでどうせ $x = 0$ が掛かっているので消えてしまいますからここでやめておきます。

従って点 $(0, 1)$ では $H''(0) < 0$ ですからこの点では極大値 ($F(0, 1) = -1$)、点 $(0, -1)$ では $H''(0) > 0$ ですからこの点では極小値 ($F(0, -1) = 1$) である事が分かります。

Exercise

基本演習 4 $x^2 + y^2 = 4$ のときに、 $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t (0 \leq t < 2\pi)$ として t の 1 変数関数に変形する方法で $F(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2$ の極値を求めてください。

基本演習 5 $G(x, y) = xy - 1 = 0$ の条件のもとでの $F(x, y) = x^2 + y^2$ の極値を、次の 3 つの方法で求めて下さい。

- (1) 各点ごとに y を x の関数と見る方法でローカルに 1 変数化して。
- (2) 条件式を使って直接グローバルに 1 変数化して。
- (3) 問題を幾何学的に捉える事によって別の視点から。

発展演習 6 (1) $a, b > 0$ のとき、任意の正の整数 n に対して

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$$

であり、等号は $a = b$ のときのみ成立することを示してください ($\frac{a}{b} = x$ と置いて 1 変数に帰着すると良い)。

- (2) $a, b > 0$ のとき、任意の正の整数 n に対して

$$\sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} \leq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}}$$

であり、等号は $a = b$ のときのみ成立することを示してください ($\frac{a}{b} = x$ と置いて 1 変数に帰着すると良い)。

Exercise 解答例

基本演習 4 $x^2 + y^2 = 4$ のときに、 $x = 2\cos t, y = 2\sin t (0 \leq t < 2\pi)$ として t の 1 変数関数に変形する方法で $F(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2$ の極値を求めてください。

$$V(t) = F(2\cos t, 2\sin t) = 12\cos^2 t + 8\sqrt{3}\cos t \sin t + 4\sin^2 t = 4\cos 2t + 4\sqrt{3}\sin 2t + 8$$

と置いて、この関数の極値を求めます。

$$V'(t) = -8\sin 2t + 8\sqrt{3}\cos 2t$$

ですから、 $V'(t) = 0$ となるのは $\tan 2t = \sqrt{3}$ のときですから、 $t = \frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}$ です。

$$V''(t) = -16\cos 2t - 16\sqrt{3}\sin 2t$$

なので、

$$V''\left(\frac{\pi}{6}\right) = V''\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -8 - 24 < 0$$

であり、 $t = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ のとき、すなわち、 $(x, y) = (\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1)$ のとき極大値 16 であり、

$$V''\left(\frac{4\pi}{6}\right) = V''\left(\frac{10\pi}{6}\right) = 8 + 24 > 0$$

であり、 $t = \frac{4\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}$ のとき、すなわち、 $(x, y) = (-1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$ のとき極小値 0 であることが分かります。□

基本演習 5 $G(x, y) = xy - 1 = 0$ の条件のもとでの $F(x, y) = x^2 + y^2$ の極値を、次の 3 つの方法で求めて下さい。

- (1) 各点ごとに y を x の関数と見る方法でローカルに 1 変数化して。
- (2) 条件式を使って直接グローバルに 1 変数化して。
- (3) 問題を幾何学的に捉える事によって別の視点から。

(1) 【下ごしらえ：曲線上でのローカルな陰関数とその微分】

$$G_x(x, y) = y, \quad G_y(x, y) = x$$

ですから $G_y = 0$ となる点は $x = 0$ となる点であり、そうした点は条件式の表す曲線 $xy - 1 = 0$ 上にはありません。従ってこの曲線上の任意の点の近くで y を x の微分可能な関数 $y = y(x)$ で表すことが出来ることが分かります。

このとき $G(x, y(x)) = 0$ が成り立っていますからこの両辺を x で微分すれば、

$$xy(x) - 1 = 0$$

$$y(x) + xy'(x) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x}$$

が得られます（曲線上では $x \neq 0$ であることに注意）。

【 $F(x, y)$ を 1 変数化したものの 1 階微分の調査】

条件式と陰関数定理を使って曲線上の各点でローカルに 1 変数に帰着させたものを

$$V(x) = F(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2$$

と定めます（一見グローバルな式に見えますが、これもあくまでも各点においてその付近でローカルに定義しているわけです）。まずこれを微分すると

$$V'(x) = 2x + 2y(x)y'(x) = 2x - \frac{2y^2}{x} = 2\frac{x^2 - y^2}{x}$$

ですから、 $V'(x) = 0$ となるのは $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$ となる点であり、 $xy = 1$ に注意すればこれは $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ の 2 点しかありません（複号同順）。

【2 階微分による極値判定】

今見た $V'(x)$ の形を見れば、これはもう一度微分可能である事が分かります。そこで、更にこの極値の候補点で 2 階微分の符号を調べます。すると

$$V''(x) = 2 - 2\frac{2yy'x - y^2}{x^2} = 2 + \frac{6y^2}{x^2} > 0$$

となっていますから先に求めた 2 つの候補点では共に極小値であることが分かります。

【結論】

$V(x)$ の極値はこの 2 つのみですから、求める $F(x, y)$ の $G(x, y) = 0$ の下での極値もこの 2 つしかない事が分かります。2 点での値を調べると $F(\pm 1, \pm 1) = 2$ ですから、題意の極値は 2 点 $(\pm 1, \pm 1)$ での（複号同順）極小値 2 のみです。

(2) 条件式によれば $y = \frac{1}{x}$ であることが具体的に分かるので、これを $F(x, y)$ に代入して得られる 1 変数関数 $V(x)$ の具体的な形も分かってしまい、

$$V(x) = F\left(x, \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

です。まず微分すると

$$V'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$$

であり、 $V(x) = 0$ となるのは $x = \pm 1$ です。また 2 階微分は

$$V''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} > 0$$

なので、さっき求めた 2 つの候補点ではどちらも極小値であることが結論されます。

従って元の関数 $F(x, y)$ は、 $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ で極小値 2 を取る事が分かります（複号同順）。

(3) 問題を絵に描いて良ーく眺めれば、この問題は

双曲線 $xy = 1$ 上の点における原点からの距離の自乗の極値を求めて下さい

という問題である事に気が付きます。そうすれば明らかに双曲線の頂点 $(\pm 1, \pm 1)$ で最小かつ極小値 2 であり、双曲線上を無限遠方に進むと原点からの距離は単調に増加して行くので極大値あるいは最大値は存在しないことがすぐに分かる筈です。□

発展演習 6 (1) $a, b > 0$ のとき、任意の正の整数 n に対して

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$$

であり、等号は $a = b$ のときのみ成立することを示して下さい ($\frac{a}{b} = x$ と置いて 1 変数に帰着すると良い)。

(2) $a, b > 0$ のとき、任意の正の整数 n に対して

$$\sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} \leq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}}$$

であり、等号は $a = b$ のときのみ成立することを示して下さい ($\frac{a}{b} = x$ と置いて 1 変数に帰着すると良い)。

(1)

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2} \\ &\Leftrightarrow 2(a+b)^n \leq 2^n(a^n + b^n) \\ &\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + 1\right)^n \leq 2^n\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right\} \end{aligned}$$

なので、 $\frac{a}{b} = x$ とし、

$$A_n(x) = 2^n(x^n + 1) - 2(x+1)^n$$

と置いて $x > 0$ で $A_n(x) \geq 0$ であることを示します。

$$A'_n(x) = 2^n \cdot nx^{n-1} - 2n(x+1)^{n-1} = 2n\{(2x)^{n-1} - (x+1)^{n-1}\}$$

なので、 $x > 0$ では $A'_n(x) = 0$ となるのは $2x = x+1$ となるとき、すなわち、 $x = 1$ の時のみです。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$A_n(x)$	$2^n - 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$
$A'_n(x)$	$-2n$	$-$	0	$+$

増減表によれば、 $x > 0$ では $A_n(x) \geq 0$ であり、等号は $x = 1$ のときにのみ成立します。

以上から題意の事実が成立し、等号は $a = b$ のときにのみ成立します。

(2)

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} &\leq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}\right)^n \\ &\Leftrightarrow (a^n + b^n)^{n+1} \leq 2(a^{n+1} + b^{n+1})^n \\ &\Leftrightarrow \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right\}^{n+1} \leq 2\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} + 1\right\}^n \end{aligned}$$

なので、 $\frac{a}{b} = x$ として右辺を左辺で割ったものを考えます：

$$A(x) = \frac{(x^{n+1} + 1)^n}{(x^n + 1)^{n+1}}$$

と置けば

$$\sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} \leq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}} \Leftrightarrow A(x) \geq \frac{1}{2}$$

ですから、これを示しましょう。

$$\begin{aligned}
 A'(x) &= \frac{n(x^{n+1}+1)^{n-1}(n+1)x^n(x^n+1)^{n+1} - (x^{n+1}+1)^n(n+1)(x^n+1)^n x^{n-1}}{(x^n+1)^{2n+2}} \\
 &= \frac{n(n+1)(x^{n+1}+1)^{n-1}x^{n-1}\{x(x^n+1) - (x^{n+1}+1)\}}{(x^n+1)^{n+2}} \\
 &= \frac{n(n+1)(x^{n+1}+1)^{n-1}x^{n-1}(x-1)}{(x^n+1)^{n+2}}
 \end{aligned}$$

ですから、 $A'(x) = 0$ となる $x > 0$ は $x = 1$ のみであって、増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$A'(x)$		$-$	0	$+$
$A(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$

となり、 $x > 0$ のとき $A_n(x) \geq \frac{1}{2}$ であることが分かります。

以上から題意の事実が成立し、等号は $a = b$ のときにのみ成立します。

□