

2 条件付きの極値問題 その2 陰関数定理

2.1 1階微分による極値の候補点のリストアップ

問題 2.1 条件 $G(x, y) = 0$ の下での関数 $F(x, y)$ の極値を求めてください。

条件式 $G(x, y) = 0$ が曲線上の点 (a, b) の付近ではローカルに解けて $y = y(x)$ と書いているものとします。

この関数 $y(x)$ を使って $H(x) = F(x, y(x))$ と定めて $H(x)$ を微分してみると、合成関数の微分規則から

$$H'(x) = F_x(x, y(x)) \cdot 1 + F_y(x, y(x))y'(x) \quad (2.1)$$

です。

一方、曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) の近くで y を x で表したものが関数 $y = y(x)$ でしたから、 $x = a$ の近くで $G(x, y(x)) = 0$ が成り立っており、この式の両辺を x で微分すれば、合成関数の微分のルールから

$$G_x(x, y(x)) + G_y(x, y(x))y'(x) = 0$$

従って特に $G_y(x, y) \neq 0$ であれば、

$$y'(x) = -\frac{G_x(x, y)}{G_y(x, y)}$$

であることが分かります。これを (2.1) に代入すると

$$H'(x) = F_x(x, y(x)) - F_y(x, y(x))\frac{G_x(x, y)}{G_y(x, y)}$$

となりますから、 $H'(a) = 0$ であることは

$$F_x(a, b) + F_y(a, b) \left\{ -\frac{G_x(a, b)}{G_y(a, b)} \right\} = 0$$

$$F_x(a, b)G_y(a, b) = F_y(a, b)G_x(a, b)$$

と書き表す事が出来ます。あるいはベクトル記法で

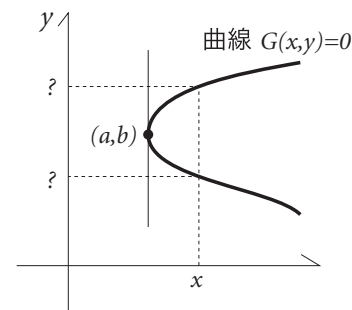
$$\text{grad}F(a, b) // \text{grad}G(a, b)$$

と書けることにも注意しておきます。

2.2 条件 $G_y \neq 0$

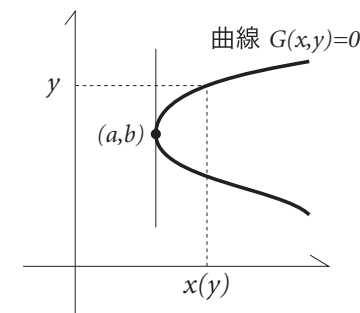
ここまでの話は $G_y = 0$ である点では上手く行きませんでした。

曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) において $G_y(a, b) = 0$ であった場合、ここが特異点でさえなければ $G_x(a, b) \neq 0$ であって、法線は x -軸に平行、接線は y -軸に平行になりますから極端に言えば下図のようになっているわけですね：



この点の近くで y を x で表そうとしても、例えば左図中の x に対して対応する y の値が2つあって定まりません。こう云った点の周りでは y を x の関数と思う事は出来ないのです。 $y(x)$ の“具体的な形はわからない”以前に存在しないわけですからもうどうしようもありません。

しかしよくよく考えてみればなぜ y を x で表したかったかと言うと、それが出来れば $F(x, y)$ から y を消去して x の1変数関数に帰着させる事が出来たからでした。と云うことは、別に何が何でも y を消去しなくても x を消去したって良いはずですよね？ つまり x を y の関数として表せば良いわけですがこれは右図の様に問題なく可能ですね！



ローカルに $x = x(y)$ であるとして計算してみると、まず $G(x(y), y) = 0$ の両辺を y で微分すれば、 $G_x \neq 0$ の時に

$$G_x(x(y), y)x'(y) + G_y(x(y), y) = 0, \quad \text{すなわち、} \quad x'(y) = -\frac{G_y(x(y), y)}{G_x(x(y), y)}$$

ですから、やはりローカルな1変数化 $J(y) = F(x(y), y)$ の微分は

$$J'(y) = F_x(x(y), y)x'(y) + F_y(x(y), y) = -F_x(x(y), y)\frac{G_y(x(y), y)}{G_x(x(y), y)} + F_y(x(y), y)$$

となって、 $J'(y) = 0$ である事は

$$F_x(x, y)G_y(x, y) = F_y(x, y)G_x(x, y)$$

となりますから前回と全く同じ条件に辿り着きます。

2.3 陰関数定理

事実 2.2 [陰関数定理] 曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) において $G_y(a, b) \neq 0$ であるならば、(曲線上の) この点の近くでは y は x の微分可能な関数として表すことができます。

曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) において $G_x(a, b) \neq 0$ であるならば、(曲線上の) この点の近くでは x は y の微分可能な関数として表すことができます。

単に2変数の関係式を提示しているだけで、誰もはっきりと『 y は x の関数だ』などと言っているわけではないのに、事実上1変数関数 $y(x)$ が存在してしまうので、これは“隠喩”の様なものだと云う事で、こうして関数を定めるプロセスの事を『陰関数』、あるいは『陰伏的に関数が定まる』などと言います。

問題 2.3 $x^4 - 4xy + y^4 = 0$ によって y が x で表せる範囲において $\frac{dy}{dx}$ を x, y で表して下さい。

【解答例】 $-4x + 4y^3 \neq 0$ である範囲で $x^4 - 4xy + y^4 = 0$ の両辺を x で微分すれば

$$4x^3 - 4y - 4xy' + 4y^3y' = 0$$

$$(4y^3 - 4x)y' = 4y - 4x^3, \quad \text{従って} \quad y' = \frac{y - x^3}{y^3 - x}$$

です。

□

基本演習 1 $G(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 1$ のとき以下の問いに答えて下さい。

(1) 曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点のうち、 $G_x(x, y) = 0$ となる点及び $G_y(x, y) = 0$ となる点をそれぞれ全て求めて下さい。

(2) 曲線 $G(x, y) = 0$ 上の特異点を求めて下さい。

(3) 曲線 $G(x, y) = 0$ 上の $G_x(x, y) \neq 0$ となる点の近くで $\frac{dx}{dy}$ を求めて下さい。
また同様に $G_y(x, y) \neq 0$ となる点の近くで $\frac{dy}{dx}$ を求めて下さい。

(1) まず偏導関数を計算しておきます。

$$G_x(x, y) = 2x + 2y, \quad G_y(x, y) = 2x - 2y$$

すると曲線上の点で $G_x = 0$ となる点の方は連立方程式：

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 - 1 = 0 & \cdots (1) \\ x + y = 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

の解と云うことになりますが、第2式から $y = -x$ としてこれを第1式に代入すると

$$0 = x^2 - 2x^2 - x^2 - 1 = -2x^2 - 1$$

となってしまうこれを満たす実数 x は存在しません。

次に曲線上の点で $G_y = 0$ となる点ですがこちらも連立方程式：

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 - 1 = 0 & \cdots (1) \\ x - y = 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

を解けば良く、同様に第2式から $x = y$ を第1式に代入すれば

$$x^2 + 2x^2 - x^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 = 1$$

から $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ が分かります。従って求める点は2点 $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) です。

(2) 特異点は(1)の結果から存在しません。

(3) まず曲線上の $G_x \neq 0$ であるような点の近くでは x を y の微分可能な関数として表すことができますので、それを $x = x(y)$ としておきましょう。すると

$$\{x(y)\}^2 + 2x(y)y - y^2 - 1 = 0$$

が(各点でローカルに)成り立っており、この両辺を普通に y で微分してみると、

$$2x(y)x'(y) + 2x'(y)y + 2x(y) - 2y = 0$$

ですが、この付近では $G_x(x, y) \neq 0$ 、すなわち $x(y) + y \neq 0$ なので整理すると

$$x'(y) = \frac{y - x(y)}{y + x(y)}$$

が得られます。

同様に曲線上の $G_y \neq 0$ であるような点付近では y を x の微分可能な関数 $y(x)$ として表すことができますから、

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy(x) - \{y(x)\}^2 - 1 &= 0 \\ 2x + 2y(x) + 2xy'(x) - 2y(x)y'(x) &= 0 \\ y'(x) &= \frac{y(x) + x}{y(x) - x} \end{aligned}$$

となります。以上から

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-x}{y+x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$$

が分かりました。

□

2.4 多変数への一般化

条件式を使ったローカルな1変数化によって極値の候補点を求める方法を、 y を x で表す場合と x を y で表す場合に分けて学びましたが、どちらも核となる判定式は全く一緒であり、条件曲線 $G(x, y) = 0$ の特異点でさえなければ判定出来る事が分かります。

ベクトル記法によれば簡単に高次元へ一般化されます：

事実 2.4 適当に滑らかな n 変数関数 $G(x_1, \dots, x_n)$ と $F(x_1, \dots, x_n)$ が与えられたとき、条件 $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ のもとで $F(x_1, \dots, x_n)$ が極値となる可能性があるのは以下の2種類の点のみです：

- (i) $G = 0$ であって $\text{grad}G = 0$ となる点
- (ii) $G = 0$ であって $\text{grad}G \neq 0$, $\text{grad}G // \text{grad}F$ となる点

Exercise

基本演習 2 次の関数 $G(x, y)$ に対して、基本演習 1 と同じ設問に答えて下さい。

- (1) $G(x, y) = x^2 + y^2 - 4$
- (2) $G(x, y) = x^2(x+1) - y^2$

基本演習 3 $g(x, y) = x + y - 1, f(x, y) = x^2 + y^2$ のとき、条件 $g(x, y) = 0$ のもとで関数 $f(x, y)$ の極値を次の3通りで求めて下さい。

- 具体的に条件式を使って1変数化して
- 陰関数定理を使って抽象的にローカルな1変数化によって
- 幾何学的な解釈によって（大雑把な説明で構いません）

基本演習 4 点 (x, y) が条件 $y^2 - x^2 - 1 = 0$ を満たしながら動くときの関数 $f(x, y) = y^3 + 2x$ の極値を求めて下さい。

基本演習 5 $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ なる式から定まる陰関数 $y = y(x)$ について、以下の問いに答えて下さい。

- (1) 導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めて下さい。
- (2) 2次導関数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めて下さい。

基本演習 6 a を定数とします。次の $x^3 - 3xy + y^3 = a$ により定まる陰関数 $y = y(x)$ に対して、 $\frac{dy}{dx}$ と $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めて下さい。

基本演習 7 $xy^2 - x^2y + 2 = 0$ で定まる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めて下さい。ただし、極小値か極大値か、そのときの x の値も書いて下さい。

基本演習 8 $x^2 - 4xy + 2y^3 + 6 = 0$ で定まる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めて下さい。

基本演習 9 $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ のとき y を x の関数と見なして y の極値を求めて下さい。

基本演習 10 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ で与えられる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めて下さい。

発展演習 11 次の各問いに答えて下さい。

(1) $f(x, y)$ は2階偏微分可能な関数とし、 $f_y \neq 0$ となる点の近くで $f(x, y) = 0$ により定義される関数を $y = \phi(x)$ とします。そのとき、

(a) $\phi'(x)$ を f_x, f_y を用いて表して下さい。

(b) $\phi'(x) = 0$ となる点での $\phi''(x)$ を f の2階までの偏微分を用いて表して下さい。

(2) 曲線 $C : f(x, y) = xy + y^2 - x^3 = 0$ 上の $f_y \neq 0$ なる部分における関数 y の極値を求め、極大か極小かを判定して下さい。

Exercise 解答例

基本演習 2 次の関数 $G(x, y)$ に対して、前問と同じ設問に答えて下さい。

$$(1) G(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \quad (2) G(x, y) = x^2(x+1) - y^2$$

(1) まず偏微分を計算しておきます：

$$G_x(x, y) = 2x, \quad G_y(x, y) = 2y.$$

次に $G_x(x, y) = 0$ となる点ですが、その様な点では $x = 0$ なので、 $G(x, y) = 0$ から $y^2 = 4$ 即ち $y = \pm 2$ が分かります。従って求める点は2点 $(0, \pm 2)$ です。

同様に $G_y(x, y) = 0$ となる点では $y = 0$ なので $x^2 = 4$ 即ち $x = \pm 2$ が分かります。従って求める点は2点 $(\pm 2, 0)$ です。

以上の結果から特異点が存在しない事も明らかです。

$G_x(x, y) \neq 0$ である点の近くで陰関数定理によって x を y を表したものを $x(y)$ とすれば、

$$\begin{aligned} 0 &= G(x(y), y) \\ &= x(y)^2 + y^2 - 4 \\ 0 &= 2x(y)x'(y) + 2y \\ x'(y) &= -\frac{y}{x(y)} \end{aligned}$$

であり、 $G_y(x, y) \neq 0$ である点の近くで陰関数定理によって y を x を表したものを $y(x)$ とすれば、

$$\begin{aligned} 0 &= G(x, y(x)) \\ &= x^2 + y(x)^2 - 4 \\ 0 &= 2x + 2y(x)y'(x) \\ y'(x) &= -\frac{x}{y(x)} \end{aligned}$$

です。

(2) まず偏微分を計算しておきます：

$$G_x(x, y) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2), \quad G_y(x, y) = -2y.$$

次に $G_x(x, y) = 0$ となる点ですが、偏微分の計算からその様な点では $x = 0$ であるか $x = -\frac{2}{3}$ であることが分かります。これを曲線の方程式に代入すれば、 $x = 0$ のときは $y = 0$ であり、また $x = -\frac{2}{3}$ のときは

$$\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - y^2 = \frac{4}{27} - y^2 = 0$$

から $y = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}$ であることが分かります。

以上から求める点は3点：

$$(0, 0), \quad \left(-\frac{2}{3}, \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

です。

次に $G_y(x, y) = 0$ となる点ですが、その様な点では（偏微分の計算から） $y = 0$ である他なく、更に曲線の方程式から $x = 0, -1$ のいずれかであることが分かります。

従って求める点は2点：

$$(0, 0), \quad (0, -1)$$

です。以上から、特異点は1点 $(0, 0)$ のみ存在します。

$G_x(x, y) \neq 0$ である点の近くで陰関数定理によって x を y を表したものを $x(y)$ とすれば、

$$\begin{aligned} 0 &= G(x(y), y) \\ &= x(y)^2(x(y) + 1) - y^2 \\ 0 &= 3x(y)^2x'(y) + 2x(y)x'(y) - 2y \\ x'(y) &= \frac{2y}{3x(y)^2 + 2x(y)} \end{aligned}$$

であり、 $G_y(x, y) \neq 0$ である点の近くで陰関数定理によって y を x を表したものを $y(x)$ とすれば、

$$\begin{aligned} 0 &= G(x, y(x)) \\ &= x^2(x+1) - y(x)^2 \\ 0 &= 3x^2 + 2x - 2y(x)y'(x) \\ y'(x) &= \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)} \end{aligned}$$

です。

基本演習 3 $g(x, y) = x + y - 1, f(x, y) = x^2 + y^2$ のとき、条件 $g(x, y) = 0$ のもとで関数 $f(x, y)$ の極値を次の3通りで求めて下さい。

- 具体的に条件式を使って1変数化して
- 陰関数定理を使って抽象的にローカルな1変数化によって
- 幾何学的な解釈によって（大雑把な説明で構いません）

【具体的に条件式を使って1変数化して】

条件から $y = 1 - x$ なので、これを使って y を消去したものを

$$F(x) = f(x, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^2$$

と置けば、

$$F(x) = 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

ですから、 $x = \frac{1}{2}$ のときに $F(x)$ は極小かつ最小値 $\frac{1}{2}$ をとり、それ以外に極値はありません。

従って求める極値は $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ での極小値 $\frac{1}{2}$ のみです。

【陰関数定理を使って抽象的にローカルな1変数化によって】

$g_y = 1 \neq 0$ なので、曲線 $g = 0$ 上の任意の点の近くで（陰関数定理により） y は x の（微分可能な）関数で表されます。それを $y(x)$ と書く事にすれば

$$0 = g(x, y(x)) = x + y(x) - 1$$

が成り立っていますから、この両辺を x で微分することによって

$$0 = 1 + y'(x), \quad \text{すなわち} \quad y'(x) = -1$$

が分かります。

この $y(x)$ を使って $f(x, y)$ をローカルに1変数化したものを $F(x)$:

$$F(x) = f(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2$$

と置けば、

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x + 2y(x)y'(x) \\ &= 2(x - y(x)) \end{aligned}$$

ですから、 $F'(x) = 0$ となる点は連立方程式：

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

の解として求められ、それは $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ のみです。

また2階微分を計算すると

$$F''(x) = 2 - 2y'(x) = 4$$

となっていますから、特に $F''(\frac{1}{2}) = 4 > 0$ であってこれは F が $x = \frac{1}{2}$ で極小値であることを意味します。

従って求める極値は $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ での極小値 $\frac{1}{2}$ のみです。

【幾何学的な解釈によって】この問題は直線 $x + y - 1 = 0$ 上の点の原点からの距離の自乗の極値を求める問題であり、明らかに原点から最も近い点 $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ で極小値かつ最小値 $\frac{1}{2}$ をとり、極大値はありません。□

基本演習 4 点 (x, y) が条件 $y^2 - x^2 - 1 = 0$ を満たしながら動くときの関数 $f(x, y) = y^3 + 2x$ の極値を求めて下さい。

【陰関数を使って抽象的かつローカルに1変数化】

$v(x, y) = y^2 - x^2 - 1$ と置けば条件式は $v(x, y) = 0$ と書く事が出来、 $v_y(x, y) = 2y$ ですが曲線 $v(x, y) = 0$ 上には $y = 0$ となる点はないので結局この曲線上の任意の点で $v_y \neq 0$ であることが分かります。

従って陰関数定理から曲線 $v = 0$ 上の任意の点の近くで y を x の（微分可能な）関数として表すことが出来るのでそれを $y(x)$ と書くことにします。すると各点でローカルに $0 = v(x, y(x)) = x^2 - y(x)^2 - 1$ が成り立っていますから、これを微分して

$$0 = 2x - 2yy' \quad \text{すなわち、} \quad y' = \frac{x}{y}$$

が得られます。

また、この陰関数を使って各点の近くで $F(x) = f(x, y(x))$ と定義すれば

$$F'(x) = 3y^2y' + 2 = 3xy + 2$$

ですから、 $F'(x) = 0$ となる点は連立方程式：

$$3xy + 2 = 0, \quad y^2 - x^2 - 1 = 0$$

の解です。第2式に $9y^2 \neq 0$ を掛けて

$$9y^4 - 9x^2y^2 - 9y^2 = 0$$

$$9y^4 - 4 - 9y^2 = 0$$

$$\left(3y^2 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$3y^2 - \frac{3}{2} = \pm \frac{5}{2}$$

$$y^2 = \frac{4}{3}$$

即ち $y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ が分かりますから第1式から x も分かって $F'(x) = 0$ となる点は

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

の2点です。

次にこの2点で $F(x)$ の2階微分を計算します。しかし

$$F''(x) = 3y + 3xy' = 3y + \frac{3x^2}{y}$$

ですから、 y が正なら F'' も正、 y が負なら F'' も負である事は明らかです。

以上から $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ では極小値、 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ では極大値であることが分かります。

最後にその値を計算しておきましょう：

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

極大値：点 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ での $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ 極小値：点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ での $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

【無理矢理具体的に1変数化】

条件式は双曲線を表していますからこれを2つの曲線 C_+, C_- に分解します：

$$C_+ : y = \sqrt{1+x^2}, \quad C_- : y = -\sqrt{1+x^2}.$$

そしてそれぞれの曲線上で関数 $f(x, y)$ を考える事にしましょう。

まず曲線 C_+ の式を使って $f(x, y)$ から y を消去したものを $f_+(x)$ とします：

$$f_+(x) = \sqrt{1+x^2}^3 + 2x.$$

すると

$$f'_+(x) = 3x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + 2, \quad f''_+(x) = \frac{3(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

ですから、 $f'_+(x) = 0$ となる点は

$$3x\sqrt{1+x^2} + 2 = 0$$

$$9x^2(1+x^2) = 4$$

$$x^4 + x^2 = \frac{4}{9}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$x^2 + \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{6}$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

から $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のみであり、この点で

$$f''_+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$$

ですからこれは極小値である事が分かります。

このとき $y = \sqrt{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ですから、 $f(x, y)$ は点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ において極小値

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

をとる事が分かります。

次に曲線 C_- の式を使って目的関数から y を消去したものを $f_-(x)$ とします：

$$f_-(x) = -\sqrt{1+x^2}^3 + 2x.$$

すると

$$f'_-(x) = -3x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + 2, \quad f''_-(x) = -\frac{3(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}} < 0$$

ですから、 $f'_-(x) = 0$ となる点は $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のみであり、この点で

$$f''_-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

ですからこれは極大値である事が分かります。

このとき $y = -\sqrt{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ですから、 $f(x, y)$ は点 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ において極大値

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

をとる事が分かります。 □

基本演習 5 $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ なる式から定まる陰関数 $y = y(x)$ について、以下の問いに答えて下さい。

(1) 導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めて下さい。 (2) 2次導関数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めて下さい。

【解答例】 (1)

$$x^2 + xy + 2y^2 = 1$$

$$2x + y + xy' + 4yy' = 0$$

$$(x + 4y)y' = -(2x + y), \quad \text{従って} \quad y' = -\frac{2x + y}{x + 4y}.$$

(2) 上の結果を更に微分すれば次の通り：

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{(2 + y')(x + 4y) - (2x + y)(1 + 4y')}{(x + 4y)^2} \\ &= -\frac{7y - 7xy'}{(x + 4y)^2} \\ &= -7\frac{y(x + 4y) + x(2x + y)}{(x + 4y)^3} \\ &= -\frac{14(xy + x^2 + 2y^2)}{(x + 4y)^3}. \end{aligned}$$

□

基本演習 6 a を定数とします。次の $x^3 - 3xy + y^3 = a$ により定まる陰関数 $y = y(x)$ に対して、 $\frac{dy}{dx}$ と $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めて下さい。

【解答例】 両辺微分すれば次の通りです：

$$3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0$$

$$(3y^2 - 3x)y' = 3y - 3x^2, \quad \text{従って} \quad y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

更に微分すれば2階微分も分かります：

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(y' - 2x)(y^2 - x) - (y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2} \\ &= \frac{\{y - x^2 - 2x(y^2 - x)\}(y^2 - x) - (y - x^2)\{2y(y - x^2) - (y^2 - x)\}}{(y^2 - x)^3} \\ &= \frac{6x^2y^2 - 2xy^4 - 2xy - 2x^4y}{(y^2 - x)^3} \\ &= \frac{2xy(3xy - x^3 - y^3 - 1)}{(y^2 - x)^3}. \end{aligned}$$

□

基本演習 7 $xy^2 - x^2y + 2 = 0$ で定まる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めて下さい。ただし、極小値か極大値か、そのときの x の値も書いて下さい。

【解答例】 $G(x, y) = xy^2 - x^2y + 2$ と置くと、 $G_y = 2xy - x^2 = x(2y - x)$ です。 $x = 0$ のとき $G(0, y) \neq 0$ であり、 $x = 2y$ のときは

$$G(2y, y) = 2y^3 - 4y^3 + 2 = 2(1 - y^3)$$

から $(x, y) = (2, 1)$ が該当します。この点では y を x の関数として表現する事は出来ません。従ってこの点以外では各点の周りで y を x の関数 $y(x)$ で表せますから $G(x, y(x)) = 0$

が成り立っており、この両辺を微分すれば

$$\begin{aligned} xy^2 - x^2y + 2 &= 0 \\ y^2 + 2xyy' - 2xy - x^2y' &= 0 \\ (2xy - x^2)y' &= 2xy - y^2, \quad \text{従って} \quad y' = \frac{y(2x - y)}{x(2y - x)} \end{aligned}$$

ですから $y' = 0$ となるのは $y = 2x$ が成り立つ点、すなわち

$$0 = 4x^3 - 2x^3 + 2 = 2(x^3 + 1)$$

から $(x, y) = (-1, -2)$ のみです。この点で2階微分は ($y' = 0$ あるいは $y = 2x$ として計算を進めると)

$$y'' = \frac{(2y + 2xy' - 2yy')x(2y - x) - y(2x - y)(2y + 2xy' - 2x)}{x^2(2y - x)^2} = \frac{2y}{x(2y - x)} < 0$$

となりますからこれは極大値です。

以上から求める陰関数の極値は点 $(-1, -2)$ での極大値 -2 のみです。□

基本演習 8 $x^2 - 4xy + 2y^3 + 6 = 0$ で定まる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めて下さい。

【解答例】 $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2y^3 + 6$ と置くと、 $f_y = -4x + 6y^2$ ですから、 $f_y = 0$ となるのは $x = \frac{3}{2}y^2$ のときです。このとき $f = 0$ から

$$0 = \frac{9}{4}y^4 - 6y^3 + 2y^3 + 6 = \frac{9}{4}y^4 - 4y^3 + 6$$

が得られますが、 $g(y) = \frac{9}{4}y^4 - 4y^3 + 6$ の増減表を書いて確認すれば任意の y に対して $g(y) \neq 0$ である事が分かりますから、結局、 $f = 0, f_y = 0$ となる点はありません。

したがって、陰関数定理より、各点の周りで y を x の関数として表すことが出来ます。

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy + 2y^3 + 6 &= 0 \\ 2x - 4y - 4xy' + 6y^2y' &= 0 \end{aligned}$$

$$(6y^2 - 4x)y' = 4y - 2x, \quad \text{従って} \quad y' = \frac{2y - x}{3y^2 - 2x}$$

ですから $y' = 0$ となるのは $x = 2y$ のときであり、このとき

$$0 = 4y^2 - 8y^2 + 2y^3 + 6 = 2y^3 - 4y^2 + 6 = 2(y + 1)(y^2 - 3y + 3)$$

ですが、最後の $y^2 - 3y + 3$ は判別式を計算すれば実数の範囲で0になりませんから、 $y' = 0$ となるのは $y = -1$ のとき、従って点 $(-2, -1)$ のみです。

また、 $y' = 0$ の点で y'' を計算すると

$$y'' = \frac{(2y' - 1)(3y^2 - 2x) - (2y - x)(6yy' - 2)}{(3y^2 - 2x)^2} = -\frac{1}{3y^2 - 2x}$$

であって、 $y''(-1) = \frac{-1}{7} < 0$ が分かります。従ってこの点では極大値です。

以上から求める極値は点 $(-2, -1)$ での極大値 -1 のみです。□

基本演習 9 $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ のとき y を x の関数と見なして y の極値を求めて下さい。

【解答例】 $f_y = -2x + 2y = 0$ となるのは $x = y$ のときであり、

$$0 = f(x, x) = 2x^2 - 2x^2 + y^2 - 4 = y^2 - 4$$

から $y = \pm 2 = x$ が分かります。従って2点 $(\pm 2, \pm 2)$ 以外では陰関数定理によって y を x の関数 $y(x)$ で表すことが出来ます。そのような各点の周りでは

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2xy + y^2 - 4 &= 0 \\ 4x - 2y - 2xy' + 2yy' &= 0 \\ (2y - 2x)y' &= 2y - 4x \\ y' &= \frac{y - 2x}{y - x} \end{aligned}$$

となりますから、 $y' = 0$ となるのは $y = 2x$ のときであって、

$$0 = f(x, 2x) = 2x^2 - 4x^2 + 4x^2 - 4 = 2(x^2 - 2)$$

から $x = \pm\sqrt{2}$ が得られます。従って極値の候補点は2点 $(\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$ (複号同順) です。この点で2階微分を計算すると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y - 2x}{y - x} \\ y'' &= \frac{(y' - 2)(y - x) - (y - 2x)(y' - 1)}{(y - x)^2} \end{aligned}$$

ですが、ここで $y' = 0$ である点でのみ計算する事に注意すれば、その点では

$$= \frac{-2}{y-x}$$

となっていますから、

$$y''(\sqrt{2}) = \frac{-2}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} < 0, \quad y''(-\sqrt{2}) = \frac{-2}{-2\sqrt{2}+\sqrt{2}} > 0$$

であって、それぞれ極大値、極小値である事が分かります。

以上から求める極値は $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ での極大値 $2\sqrt{2}$ 、 $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ での極小値 $-2\sqrt{2}$ のみです。□

基本演習 10 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ で与えられる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めて下さい。

【解答例】 $G(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ と置きます。 $G_y = -3x + 3y^2$ ですから、 $x = y^2$ を満たす点では $G_y = 0$ であって、 y を x の関数で表すことは出来ません。 $x = y^2$ を $G = 0$ に代入すると

$$0 = y^6 - 3y^3 + y^3 = y^3(y^3 - 2)$$

ですからそのような点は $(0, 0)$ 、 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ の2点です。

この2点以外の $G = 0$ を満たす各点の周りで y を x の関数で表した $y(x)$ について

$$G(x, y(x)) = x^3 - 3xy(x) + y(x)^3 = 0$$

が成り立っていますからこれを両辺微分すれば

$$3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0$$

$$(3y^2 - 3x)y' = 3y - 3x^2, \quad \text{従って} \quad y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(y' - 2x)(y^2 - x) - (y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2} \\ &= \frac{y - x^2 - 2x(y^2 - x)}{(y^2 - x)^2} - \frac{(y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2} \\ &= -\frac{2x}{y^2 - x} + \frac{y - x^2}{(y^2 - x)^2} - \frac{(y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2} \end{aligned}$$

です。

まず $y' = 0$ となる点を求めます。これは連立方程式：

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^3 - 3xy + y^3 = 0 \end{cases}$$

を解けば良いわけですが、第1式を第2式に代入すれば

$$0 = x^3 - 3x^3 + x^6 = x^3(x^3 - 2)$$

ですから2点 $(0, 0)$ 、 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ が求まります（ただし前者は除外されます）。

点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ では上で見たように

$$y'' = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}^4 - \sqrt[3]{2}} < 0$$

ですから、この点では極大値である事が分かります。

従って求める陰関数の極値は点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ での極大値 $\sqrt[3]{2}$ のみです。□

発展演習 11 次の各問いに答えて下さい。

(1) $f(x, y)$ は2階偏微分可能な関数とし、 $f_y \neq 0$ となる点の近くで $f(x, y) = 0$ により定義される関数を $y = \phi(x)$ とします。そのとき、

(a) $\phi'(x)$ を f_x, f_y を用いて表して下さい。

(b) $\phi'(x) = 0$ となる点での $\phi''(x)$ を f の2階までの偏微分を用いて表して下さい。

(2) 曲線 $C : f(x, y) = xy + y^2 - x^3 = 0$ 上の $f_y \neq 0$ なる部分における関数 y の極値を求め、極大か極小かを判定して下さい。

(1;a) $f(x, \phi(x)) = 0$ なので、この両辺を x で微分すると

$$f_x(x, \phi(x)) + f_y(x, \phi(x))\phi'(x) = 0$$

であり、 $f_y \neq 0$ であるようなところで考えているので

$$\phi'(x) = -\frac{f_x(x, \phi(x))}{f_y(x, \phi(x))}$$

が得られます。

(1;b)

$$0 = f_x(x, \phi(x)) + f_y(x, \phi(x))\phi'(x)$$

の両辺を x で更に微分すると

$$\begin{aligned} &= f_{xx}(x, \phi(x)) + f_{xy}(x, \phi(x))\phi'(x) + f_{yx}(x, \phi(x))\phi'(x) \\ &\quad + f_{yy}(x, \phi(x))\phi'(x)^2 + f_y(x, \phi(x))\phi''(x) \end{aligned}$$

ですが、 $\phi'(x) = 0$ となる点に於いては

$$= f_{xx}(x, \phi(x)) + f_y(x, \phi(x))\phi''(x)$$

なので

$$\phi''(x) = -\frac{f_{xx}(x, \phi(x))}{f_y(x, \phi(x))}$$

となっています。

(2) $\phi'(x) = 0$ となる点を求めると、上の (a) の結果から $f_x(x, \phi(x)) = 0$ となる点を求めれば良く、これは連立方程式：

$$\begin{cases} y - 3x^2 = 0 \\ xy + y^2 - x^3 = 0 \end{cases}$$

の解です。第1式を第2式に代入すれば

$$0 = 3x^3 + 9x^4 - x^3 = x^3(9x + 2)$$

より、 $x = 0, -\frac{2}{9}$ です（それぞれ $y = 0, \frac{4}{27}$ ）。

$(x, y) = (0, 0)$ の時には $f_y(x, y) = x + 2y$ は 0 になってしまうので問題の設定外であり、 $(x, y) = (-\frac{2}{9}, \frac{4}{27})$ の時には (b) の結果から

$$\phi''(x) = -\frac{f_{xx}(x, \phi(x))}{f_y(x, \phi(x))} = \frac{6x}{x + 2y} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{2}{9} + \frac{8}{27}} < 0$$

となっているのでここでは極大値である事が分かります（極値は $\frac{4}{27}$ ）。

□