

2 条件付きの極値問題 その2 陰関数定理

2.1 1階微分による極値の候補点のリストアップ

問題 2.1 条件 $G(x, y) = 0$ の下での関数 $F(x, y)$ の極値を求めてください。

条件式 $G(x, y) = 0$ が曲線上の点 (a, b) の付近ではローカルに解けて $y = y(x)$ と書いているものとします。

この関数 $y(x)$ を使って $H(x) = F(x, y(x))$ と定めて $H(x)$ を微分してみると、合成関数の微分規則から

$$H'(x) = F_x(x, y(x)) \cdot 1 + F_y(x, y(x))y'(x) \quad (2.1)$$

です。

一方、曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) の近くで y を x で表したものが関数 $y = y(x)$ でしたから、 $x = a$ の近くで $G(x, y(x)) = 0$ が成り立っており、この式の両辺を x で微分すれば、合成関数の微分のルールから

$$G_x(x, y(x)) + G_y(x, y(x))y'(x) = 0$$

従って特に $G_y(x, y) \neq 0$ であれば、

$$y'(x) = -\frac{G_x(x, y)}{G_y(x, y)}$$

であることが分かります。これを (2.1) に代入すると

$$H'(x) = F_x(x, y(x)) - F_y(x, y(x))\frac{G_x(x, y)}{G_y(x, y)}$$

となりますから、 $H'(a) = 0$ であることは

$$F_x(a, b) + F_y(a, b) \left\{ -\frac{G_x(a, b)}{G_y(a, b)} \right\} = 0$$

$$F_x(a, b)G_y(a, b) = F_y(a, b)G_x(a, b)$$

と書き表す事が出来ます。あるいはベクトル記法で

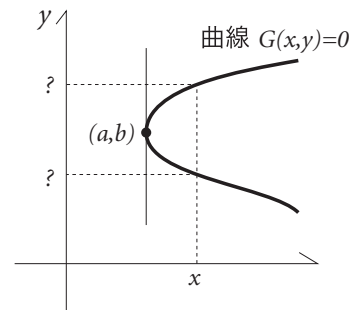
$$\text{grad}F(a, b) // \text{grad}G(a, b)$$

と書けることにも注意しておきます。

2.2 条件 $G_y \neq 0$

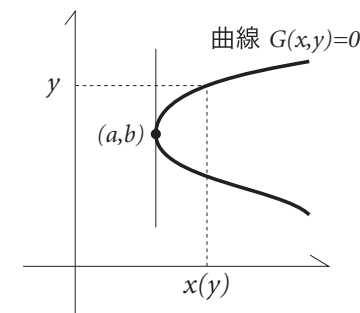
ここまでの話は $G_y = 0$ である点では上手く行きませんでした。

曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) において $G_y(a, b) = 0$ であった場合、ここが特異点でさえなければ $G_x(a, b) \neq 0$ であって、法線は x -軸に平行、接線は y -軸に平行になりますから極端に言えば下図のようになっているわけですね：



この点の近くで y を x で表そうとしても、例えば左図中の x に対して対応する y の値が2つあって定まりません。こう云った点の周りでは y を x の関数と思う事は出来ないのです。 $y(x)$ の“具体的な形はわからない”以前に存在しないわけですからもうどうしようもありません。

しかしよくよく考えてみればなぜ y を x で表したかったかと言うと、それが出来れば $F(x, y)$ から y を消去して x の1変数関数に帰着させる事が出来たからでした。と云うことは、別に何が何でも y を消去しなくても x を消去したって良いはずですよね？ つまり x を y の関数として表せば良いわけですがこれは右図の様に問題なく可能ですね！



ローカルに $x = x(y)$ であるとして計算してみると、まず $G(x(y), y) = 0$ の両辺を y で微分すれば、 $G_x \neq 0$ の時に

$$G_x(x(y), y)x'(y) + G_y(x(y), y) = 0, \quad \text{すなわち、} \quad x'(y) = -\frac{G_y(x(y), y)}{G_x(x(y), y)}$$

ですから、やはりローカルな1変数化 $J(y) = F(x(y), y)$ の微分は

$$J'(y) = F_x(x(y), y)x'(y) + F_y(x(y), y) = -F_x(x(y), y)\frac{G_y(x(y), y)}{G_x(x(y), y)} + F_y(x(y), y)$$

となって、 $J'(y) = 0$ である事は

$$F_x(x, y)G_y(x, y) = F_y(x, y)G_x(x, y)$$

となりますから前回と全く同じ条件に辿り着きます。

2.3 陰関数定理

事実 2.2 [陰関数定理] 曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) において $G_y(a, b) \neq 0$ であるならば、(曲線上の) この点の近くでは y は x の微分可能な関数として表すことができます。

曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) において $G_x(a, b) \neq 0$ であるならば、(曲線上の) この点の近くでは x は y の微分可能な関数として表すことができます。

単に2変数の関係式を提示しているだけで、誰もはっきりと『 y は x の関数だ』などと言っているわけではないのに、事実上1変数関数 $y(x)$ が存在してしまうので、これは“隠喩”の様なものだと言う事で、こうして関数を定めるプロセスの事を『陰関数』あるいは『陰伏的に関数が定まる』などと言います。

問題 2.3 $x^4 - 4xy + y^4 = 0$ によって y が x で表せる範囲において $\frac{dy}{dx}$ を x, y で表して下さい。

【解答例】 $-4x + 4y^3 \neq 0$ である範囲で $x^4 - 4xy + y^4 = 0$ の両辺を x で微分すれば

$$4x^3 - 4y - 4xy' + 4y^3y' = 0$$

$$(4y^3 - 4x)y' = 4y - 4x^3, \quad \text{従って} \quad y' = \frac{y - x^3}{y^3 - x}$$

です。

□

基本演習 1 $G(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 1$ のとき以下の問いに答えて下さい。

(1) 曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点のうち、 $G_x(x, y) = 0$ となる点及び $G_y(x, y) = 0$ となる点をそれぞれ全て求めて下さい。

(2) 曲線 $G(x, y) = 0$ 上の特異点を求めて下さい。

(3) 曲線 $G(x, y) = 0$ 上の $G_x(x, y) \neq 0$ となる点の近くで $\frac{dx}{dy}$ を求めて下さい。
また同様に $G_y(x, y) \neq 0$ となる点の近くで $\frac{dy}{dx}$ を求めて下さい。

2.4 多変数への一般化

条件式を使ったローカルな1変数化によって極値の候補点を求める方法を、 y を x で表す場合と x を y で表す場合に分けて学びましたが、どちらも核となる判定式は全く一緒であり、条件曲線 $G(x, y) = 0$ の特異点でさえなければ判定出来る事が分かります。

ベクトル記法によれば簡単に高次元へ一般化されます：

事実 2.4 適当に滑らかな n 変数関数 $G(x_1, \dots, x_n)$ と $F(x_1, \dots, x_n)$ が与えられたとき、条件 $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ のもとで $F(x_1, \dots, x_n)$ が極値となる可能性があるのは以下の2種類の点のみです：

- (i) $G = 0$ であって $\text{grad}G = 0$ となる点
- (ii) $G = 0$ であって $\text{grad}G \neq 0$, $\text{grad}G // \text{grad}F$ となる点

Exercise

基本演習 2 次の関数 $G(x, y)$ に対して、基本演習 1 と同じ設問に答えて下さい。

(1) $G(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ (2) $G(x, y) = x^2(x + 1) - y^2$

基本演習 3 $g(x, y) = x + y - 1, f(x, y) = x^2 + y^2$ のとき、条件 $g(x, y) = 0$ のもとで関数 $f(x, y)$ の極値を次の 3 通りで求めて下さい。

- 具体的に条件式を使って 1 変数化して
- 陰関数定理を使って抽象的にローカルな 1 変数化によって
- 幾何学的な解釈によって（大雑把な説明で構いません）

基本演習 4 点 (x, y) が条件 $y^2 - x^2 - 1 = 0$ を満たしながら動くときの関数 $f(x, y) = y^3 + 2x$ の極値を求めて下さい。

基本演習 5 $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ なる式から定まる陰関数 $y = y(x)$ について、以下の問いに答えて下さい。

(1) 導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めて下さい。 (2) 2 次導関数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めて下さい。

基本演習 6 a を定数とします。次の $x^3 - 3xy + y^3 = a$ により定まる陰関数 $y = y(x)$ に対して、 $\frac{dy}{dx}$ と $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めて下さい。

基本演習 7 $xy^2 - x^2y + 2 = 0$ で定まる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めて下さい。ただし、極小値か極大値か、そのときの x の値も書いて下さい。

基本演習 8 $x^2 - 4xy + 2y^3 + 6 = 0$ で定まる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めて下さい。

基本演習 9 $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ のとき y を x の関数と見なして y の極値を求めて下さい。

基本演習 10 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ で与えられる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めて下さい。

発展演習 11 次の各問いに答えて下さい。

(1) $f(x, y)$ は 2 階偏微分可能な関数とし、 $f_y \neq 0$ となる点の近くで $f(x, y) = 0$ により定義される関数を $y = \phi(x)$ とします。そのとき、

(a) $\phi'(x)$ を f_x, f_y を用いて表して下さい。

(b) $\phi'(x) = 0$ となる点での $\phi''(x)$ を f の 2 階までの偏微分を用いて表して下さい。

(2) 曲線 $C : f(x, y) = xy + y^2 - x^3 = 0$ 上の $f_y \neq 0$ なる部分における関数 y の極値を求め、極大か極小かを判定して下さい。