3　条件付きの極値問題　その３　Lagrange の未定乗数法

3.1　Lagrange の未定乗数法

条件付きの極値問題に於ける候補点（１階微分が０になる点に相当）の条件式は多変数の場合に gradient の平行と云う形で拡張されることを見ました。

普通、２つのヴェクターが平行と云う事を『一方が他方の定数倍である』と云う風に解釈して次の様に定式化します：

定理 3.1 [Lagrange の未定乗数法] 条件 $G(x_1,\dots,x_n)=0$ のもとで $F(x_1,\dots,x_n)$ が極値をとる可能性があるのは次の２種類の点のみです：

（i）$G=0$ となる点で $\mathrm{grad}G=\mathit{o}$ であるもの（特異点）

（ii）$G=0$ となる点で $\mathrm{grad}F=p\,\mathrm{grad}G$ となる様な実数 p が存在するもの

3.1.1　注意その１

本当は (ii) に『特異でない点で』の一言を入れても良いのでしょうが、そこを気にしながら解くのも面倒なので削りました。従って (i)、(ii) の双方に属する点もあり得ます。

3.1.2　注意その２　$\mathrm{grad}F=p\,\mathrm{grad}G$ か、$\mathrm{grad}G=p\,\mathrm{grad}F$ か

２つのヴェクターが平行である事を (ii) の式で $\mathrm{grad}F=p\,\mathrm{grad}G$ としたわけですが、これを $\mathrm{grad}G=p\,\mathrm{grad}F$ としてはいけないのでしょうか？

$G(x,y)=(x-2)^2x-y^2$, $F(x,y)=x^2+y^2$ の場合で具体的に見てみましょう。

$$\begin{cases}\mathrm{grad}F=p\,\mathrm{grad}G\\ G=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x=p(3x^2-8x+4)\\ 2y=-2py\\ (x-2)^2x-y^2=0\end{cases}$$

となり、$(x,y)=(0,0)$ は（$p=0$ とすることによって）解になっています。

一方、

$$\begin{cases}\mathrm{grad}G=p\,\mathrm{grad}F\\ G=0\end{cases}\iff\begin{cases}3x^2-8x+4=2px\\ -2y=2py\\ (x-2)^2x-y^2=0\end{cases}$$

であり、$(x,y)=(0,0)$ は明らかに最初の式を満たしません。

この様にどちらを選択するかで極値の候補点が違ってきますが、$F(x,y)$ が原点で最小値になっていることは自明ですから正しいのは前者です。

なぜこの違いが生まれてしまったかと言うと、まず前者では $\mathrm{grad}F=\mathit{o}$ となる点を全て含んでいましたが、後者では $\mathrm{grad}F=\mathit{o}$ だと自動的に左辺も $\mathrm{grad}G=\mathit{o}$ になってしまい、$\mathrm{grad}F=\mathit{o}$ かつ $\mathrm{grad}G\neq\mathit{o}$ である点を逃してしまっています。で、そのような点で極値をとる場合もありますから後者では駄目だと云う事なのです。

以上のような事情から、(i) を『$\mathrm{grad}G=\mathit{o}$ または $\mathrm{grad}F=\mathit{o}$ となる点』とするのであれば、(ii) は $\mathrm{grad}F=p\,\mathrm{grad}G$ でも、$\mathrm{grad}G=p\,\mathrm{grad}F$ でもどちらでも構いません。

3.1.3　注意その３

p も変数と思って $n+1$ 変数の関数 $L(x_1,\dots,x_n,p)=F(x_1,\dots,x_n)-pG(x_1,\dots,x_n)$ を考えれば、$L_p=-G$ ですから

$$\mathrm{grad}L=\mathit{o}\iff\mathrm{grad}F-p\mathrm{grad}G=\mathit{o}\quad\text{かつ}\quad G=0$$

となり、(ii) の条件は一言 $\mathrm{grad}L=\mathit{o}$ で書けてしまいます。この流儀で書かれている教科書も多いでしょう。

例題 3.2 条件 $G(x,y,z)=ax+by+cz+d=0$ のもとでの関数 $F(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ の極値の候補点リストを作ってください。ただし、a,b,c のうち少なくとも１つは０でないとします。

$$\mathrm{grad}F=\begin{pmatrix}2(x-x_0)\\2(y-y_0)\\2(z-z_0)\end{pmatrix},\qquad\mathrm{grad}G=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

ですから、$\mathrm{grad}G=\mathit{o}$ となる特異点はありません。従って極値の候補は次の連立方程式の解（のうち (x,y,z)）です：

$$\begin{cases}2x-2x_0=pa\\ 2y-2y_0=pb\\ 2z-2z_0=pc\\ ax+by+cz+d=0\end{cases}$$

第１式から $x=\frac{p}{2}a+x_0$ であり、全く同様に第２・３式から $y=\frac{p}{2}b+y_0$, $z=\frac{p}{2}c+z_0$

が分かりますから、これらを第４式に代入すれば

$$\begin{aligned} a\left(\frac{p}{2}a+x_0\right)+b\left(\frac{p}{2}b+y_0\right)+c\left(\frac{p}{2}c+z_0\right)+d=0 \\ \frac{p}{2}(a^2+b^2+c^2)=-(ax_0+by_0+cz_0+d) \\ p=-2\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

が得られます。以上から連立方程式の解は

$$\left(-a\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}+x_0, -b\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}+y_0, -c\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}+z_0\right)$$

のみです。 □

基本演習 1 $G(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2-1=0$ と云う条件のもとでの関数 $F(x,y)=xy$ の極値の候補点リストを作って下さい。

$$F_x=y,\quad F_y=x,\qquad G_x=\frac{x}{2},\quad G_y=2y.$$

によれば、$\mathrm{grad}G(x,y)=\mathit{o}$ となるのは明らかに原点のみですが、原点は条件 $G(x,y)=0$ を満たしません。よって曲線 $G(x,y)=0$ に特異点はありません。

【解答例その１　Lagrange の定理を使う方法】

$\mathrm{grad}F(x,y)=w\,\mathrm{grad}G(x,y)$ に条件式 $G(x,y)=0$ を加えた連立方程式（右式）を解くことになります。

$$\begin{cases} y=\frac{x}{2}w \\ x=2yw \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$$

第２式を第１式に代入すれば $y=yw^2$、すなわち $y(1-w^2)=0$ となるので場合分けをしましょう。

<u>$y=0$ のとき：</u>第２式から $x=0$ でもあり、これは第３式と矛盾します。

<u>$y\neq 0$ のとき：</u>このとき $w=\pm1$ であり、第１式と第２式は同じ式となりますから、連立方程式は

$$\begin{cases} x=\pm 2y \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$$

であって、これを解けば良い事になります。第１式を第２式に代入して $2y^2=1$、すなわち $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ が得られ、更に第１式に戻して $x=\pm\sqrt{2}$ です（複号同順でない)。

以上により、関数 $F(x,y)$ が条件 $G(x,y)=0$ の下での極値をとる候補点は４点：$\left(\pm\sqrt{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$（複号同順でない）である事が分かりました。

【解答例その２　$F_xG_y=F_yG_x$ による方法】

極値の候補点は $G=0$ を満たす点で $F_xG_y=F_yG_x$ すなわち $2y^2=\frac{x^2}{2}$ を満たすものですから、$x^2=4y^2$ を $G=0$ に代入すれば $2y^2=1$ となって $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ が得られます。また $x=\pm2y$ ですから求める点は４点：$\left(\pm\sqrt{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$（複号同順でない）です。 □

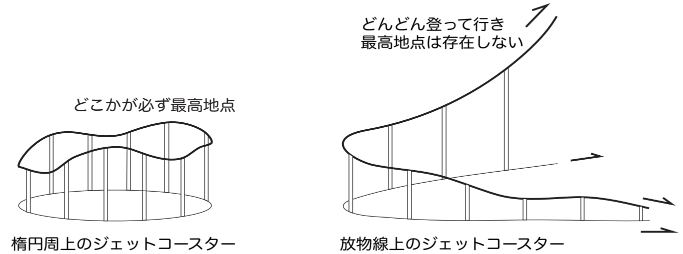
この様に、２変数の場合は Lagrange の定理を使わない方が簡単な場合も多々あります。

3.2 最大値・最小値の存在

基本演習１では極値の候補点までは求まっているわけですから、当然次にやらねばならないことはこの候補点の中に本当に極値はあるのか、あるとすればそれは極大なのか、極小なのかを判別することです。

もちろん２変数の問題であればローカルに１変数化して２階微分を計算すれば良いのですが、３変数以上の場合にも通用する方法も考えなければなりません。完全な解決策ではありませんが、場合によっては有効な方法がありますのでそれを見て行きましょう。

地面に描いた条件式の表す曲線 $G(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2-4=0$ 楕円周ですね）の上に柱を立てて、滑らかなジェットコースターのコースを作ります（ジャンプとかは無しですよ)。１周コースを造った時に、当然ですがどこかに一番高いところがある筈です。



しかし例えば最初に地面に描いた曲線が放物線だったら、端の方に（端はないですが）行くにつれてどんどん高くなって行く様に設計することが出来、最高地点（同様に最低地点も）があるとは限りません。

この『楕円と放物線の違い』が重要です。更に言えば、一般に楕円周の様にぐるっと１周つながっている曲線のことを閉曲線と言いますが、閉曲線上のジェットコースターを考えても同じですから、

閉曲線上のジェットコースターには必ず最高点・最低点がある

と言って良いはずです。これをもう少し数学的に表現してみましょう。

まずこのコースの各地点での高さは関数 $F(x,y)$ で表されるわけですが、コースはなめらかに“つながっている”わけですから、これは連続関数です。また、コースは地面に書かれた曲線 $G(x,y)=0$ の上に作られていますから、コースの各点での高さを考える事は、$G(x,y)=0$ を満たすような点 (x,y)（だけ）で２変数関数 $F(x,y)$ を見ていることになり、これは条件 $G(x,y)=0$ の下での関数 $F(x,y)$ の値を考えていることに他なりません。従って、

$G(x,y)=0$ の表す曲線が閉曲線であるならば、連続関数 $F(x,y)$ は条件 $G(x,y)=0$ のもとでの最大値・最小値を必ずもつ

と言っているわけです。

更に、一般には最大値が極大値であるとは限りません（定義域の端点での最大値など）が、今考えている様な閉曲線上で定義された関数の場合は、最大値は必ず極大値であり、最小値は必ず極小値になっていますので結局次のようにまとめる事が出来ます。

定理 **3.3 [** 閉曲線上での連続関数の性質 **]** $G(x,y)=0$ の表す曲線が閉曲線である時、条件 $G(x,y)=0$ のもとでの連続関数 $F(x,y)$ の最大値・最小値は必ず存在し、同時にそれらは極大値・極小値でもある。

3.3　極値の確定

この閉曲線上での連続関数の性質を使うと、既に求めてある候補の中から実際の極値を直ちに確定出来る場合があります。

関数 $F(x,y)=xy$ が条件 $G(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2-1=0$ のもとで極値をとる可能性があるのは４点 $\left(\pm\sqrt{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ （複号同順でない）でした。

しかし、今考えている条件式の表す曲線は楕円周（即ち閉曲線）ですから、連続関数 $F(x,y)$ はこの楕円周上で必ず最大値と最小値を達成し、また、それらは同時に極値である事が分かります。

そうするとそれら最大値・最小値は極値であるが故にさっき求めた４つの候補点の中のどれかでなければなりません。そこで４点での関数 $f(x,y)$ の値を調べると、

$$F\left(\pm\sqrt{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1,\quad F\left(\pm\sqrt{2},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1\quad\text{（それぞれ複号同順）}$$

なので、この前者が最大値（かつ極大値）であり、後者が最小値（かつ極小値）である他ありません。他に極値となりうる点はありませんから結局これらが求める極値の全てである事が分かります。

当然ですが、条件式の表す曲線が放物線や双曲線であるときにはこの連続関数の性質は使えませんので極値をこの方法で確定することはできません。

また、候補点での関数の値のヴァリエーションが３種類以上あるときにも、最大値でも最小値でもない点に関しては、極値であるかどうか何も言えません。

しかし少なくとも『最大値・最小値を求めよ』と云うタイプの問題に対しては、この方法が非常に有効である場合があります。

3.4　３変数の場合

３変数関数 $G(x,y,z)$ に対して方程式 $G(x,y,z)=0$ を満たす点の全体は一般には曲面になります。例えば $x^2+y^2+z^2=1$ は球面を表しています。

２変数の時に閉曲線上の連続関数の性質を使って最大値等を決定しましたが、３変数の場合には同様に『閉曲面』上の連続関数の性質が重要になります。ここでは特に楕円面に限定しておきます。

正の定数 a,b,c に対して方程式 $ax^2+by^2+cz^2=1$ が表す曲面を楕円面と言います。楕円面上の連続関数 $F(x,y,z)$ を考えることは、歪んだ地球で各点での標高を考えている様なもので、どんな地形を考えたとしても、必ずどこかが最高地点・最低地点になっています。従って次の事が分かります：

事実 **3.4** 楕円面（本当は“閉曲面”で良い）上で定義された連続関数は最大値と最小値を必ずもち、それらは同時に極値でもあります。

これを３変数関数に対する Lagrange の定理で得た極値の候補リストに対して適用して、最大値・最小値あるいは極値等を確定させる事が出来る場合があります。

3.5 その他の理由で極値の存在が保証される場合

> 例題 **3.5** 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離を求めてください。

これが『平面だ』と言っている以上、$a=b=c=0$ ではないことに注意します。

点 P から平面へ下ろした垂線の足を H としたとき、平面上の点 $X(x,y,z)$ と点 P との距離 $PX = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ は H において最小値をとります。これは自明として良いでしょう。そうすると、次のような問題を考えたとき：

> 例題 **3.6** 条件 $G(x,y,z) = ax+by+cz+d = 0$ のもとでの関数 $F(x,y,z) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ の最小値を求めてください。

問われている最小値は存在すると言えます（根号が嫌なので距離の自乗 $F = D^2$ を考えています)。この最小値を求めて平方根を取れば、点と平面の距離が求まるはずです。

この条件付き最小値問題の条件式が表す曲面は平面であって所謂『閉曲面』ではないため、先に見たような『閉曲面上の連続関数の性質』を使うことは出来ません。しかし、幸いなことに、今見たような特別な事情によってその最小値が存在することは分かっています。しかも、その達成点は条件式の表す平面の『内部の点』ですから（もっとも、平面に『端』はありませんが)、この最小値は同時に極小値でもあります。

すると、先の例題 3.2 で求めた極値の候補点リストの中にこの最小値（かつ極小値）が含まれていることになり、リストが１点

$$\left(-a\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}+x_0, -b\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}+y_0, -c\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}+z_0\right)$$

のみだったので、この点で最小値であることが分かってしまいます。従って F の最小値は

$$\frac{(ax_0+by_0+cz_0+d)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

であり、これの平方根が求める点と平面の距離となります。

このように、何も閉曲面や閉曲線上の連続関数の性質を持ち出さなくても、目的の極値、最大値・最小値が存在していることが分かっているのであれば、何とかなってしまう場合があります。

Exercise

基本演習 **2** 条件 $G(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-2xy-2yz-2 = 0$ のもとでの関数 $F(x,y,z) = z$ の最大値・最小値を求めてください。ただし、最大値・最小値は存在し、同時に極値にもなっているものとします。

基本演習 **3** Lagrange の未定乗数法により、$G(x,y) = x^2+y^2-4 = 0$ と云う条件のもとでの $F(x,y) = 3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2$ の極値を求めて下さい。

基本演習 **4** 条件 $x^2+y^2-1=0$ の下で、関数 $f(x,y) = 3x-y$ が極値をとり得る点をすべて求め、その点で極大か極小かも判定して下さい。

基本演習 **5** xy 平面上の点 (x,y) が $\phi(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ で表される曲線上を動くとき、関数 $Z = f(x,y) = x+2y+5$ が極値をとる点 (x,y) とその極値を求めて下さい。

基本演習 **6** $x^2+y^2=1$ のもとで、$f(x,y) = x^2+4\sqrt{2}xy+3y^2$ の最大値、最小値、およびそれらを与える x, y を求めて下さい。

基本演習 **7** $x^2+y^2+z^2=1$ として、$f(x,y,z) = x+y^2+z^3$ の最大値と最小値を求めて下さい。

基本演習 **8** 条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ のもとで、$f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ の最大値、最小値を求めてください。ただし $a>b>c>0$ とします。

Exercise　解答例

基本演習 **2** 条件 $G(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-2xy-2yz-2=0$ のもとでの関数 $F(x,y,z)=z$ の最大値・最小値を求めてください。ただし、最大値・最小値は存在し、同時に極値にもなっているものとします。

$$\mathrm{grad}F=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \mathrm{grad}G=\begin{pmatrix}2x-2y\\4y-2x-2z\\6z-2y\end{pmatrix}$$

であり、

$$\begin{vmatrix}2&-2&0\\-2&4&-2\\0&-2&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}4&-2\\-2&6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&-2\\0&6\end{vmatrix}=40-24\neq 0$$

ですから $\mathrm{grad}G=\mathit{o}$ となるのは原点のみです。しかし原点は条件を満たさないため、$G=0,\mathrm{grad}G=\mathit{o}$ となる点はありません。

すると Lagrange の定理から、問題の条件における極値の候補点は連立方程式：

$$\begin{cases}0=2p(x-y)\\0=2p(-x+2y-z)\\1=2p(-y+3z)\\x^2+2y^2+3z^2-2xy-2yz-2=0\end{cases}$$

の解（のうち x,y,z）です。第３式から $p\neq 0$ なので、第１式から $x=y$、第２式から

$$\begin{aligned}-x+2y-z&=0\\y-z&=0\end{aligned}$$

となって $x=y=z$ が分かります。第４式によれば $x^2=1$ ですから $(x,y,z)=(\pm1,\pm1,\pm1)$ が得られます（第３式は適切な p によって満たされます）。

以上から極値の候補点は２点 $(x,y,z)=(\pm1,\pm1,\pm1)$ です。

問題文にあるように、求める最大値・最小値は存在し、かつ極値になっていますから、これらは今求めた極値の候補点の中になければならず、

$$F(1,1,1)=1,\quad F(-1,-1,-1)=-1$$

ですから、前者が最大値、後者が最小値です。 □

基本演習 **3** Lagrange の未定乗数法により、$G(x,y)=x^2+y^2-4=0$ と云う条件のもとでの $F(x,y)=3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2$ の極値を求めて下さい。

【解答例】

$$F_x=6x+2\sqrt{3}y, F_y=2\sqrt{3}x+2y,\quad G_x=2x, G_y=2y$$

ですが、$\mathrm{grad}G(x,y)=\mathit{o}$ となるのは明らかに原点のみです。しかし原点は条件式 $G(x,y)=0$ を満たしませんのでこの曲線上には特異点はありません。

次に $\mathrm{grad}F(x,y)=m\,\mathrm{grad}G(x,y)$ となる様な実数 m が存在する点を求めます。この式に点 (x,y) が条件を満たすと云う式を加えて具体的に書けば：

$$\begin{cases}6x+2\sqrt{3}y=2mx\\2\sqrt{3}x+2y=2my\\x^2+y^2=4\end{cases}$$

ですからこれを解いて x,y を求めることになります。

第２式を x について解けば $x=\frac{y(m-1)}{\sqrt{3}}$ なのでこれを第１式に代入すれば

$$\begin{aligned}2\sqrt{3}y=(2m-6)x&=\frac{y(m-1)(2m-6)}{\sqrt{3}}\\6y&=y(m-1)(2m-6)\\0&=\{(m-1)(2m-6)-6\}y=m(m-4)y\end{aligned}$$

となります。しかしここで $y=0$ の時には第２式から直ちに $x=0$ も出て来てしまい、これが第３式と矛盾するので $m(m-4)=0$ です。

$\underline{m=0\text{ のとき：}}$このとき第１式と第２式は同じ式である事がすぐに分かり、連立方程式は実質的には

$$\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0\\x^2+y^2=4\end{cases}$$

ですのでこれを解きます。第１式を第２式に代入して $4x^2=4$ すなわち $x=\pm1$ が分かるので、このとき y は $y=\mp\sqrt{3}$ です（x と y で複号同順）。

$m=4$ のとき：このとき第１式と第２式は同じ式である事がすぐに分かり、連立方程式は実質的には

$$\begin{cases} -x+\sqrt{3}y=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

ですのでこれを解きます。第１式を第２式に代入して $4y^2=4$ すなわち $y=\pm1$ が分かるので、このとき x は $x=\pm\sqrt{3}$ です（x と y で複号同順）。

> あるいは、第２式を $\sqrt{3}$ 倍すれば左辺が第１式と同じですから、右辺を比較して $2m(x-\sqrt{3}y)=0$、従って、$m=0$ または $x=\sqrt{3}y$ が得られ、同様の答えに至ります。

以上により、求める極値の候補点は４点 $(\pm1,\mp\sqrt{3}),(\pm\sqrt{3},\pm1)$ である事が分かりました（複号同順）。

条件式 $G(x,y)=0$ の表す曲線は閉曲線（円周）です。

連続関数 $F(x,y)$ は、閉曲線上で必ず最大値と最小値を持ち、かつそれらは同時に極大値、極小値である事が知られています。

そうするとその存在する最大値・最小値は極値であるが故に先程求めた候補点４点のいずれかで達成されていなければならないわけですが、この４点での $F(x,y)$ の値を調べてみると

$$F(\pm1,\mp\sqrt{3})=0,\quad F(\pm\sqrt{3},\pm1)=16 \quad (\text{複号同順})$$

なので、この前者が最小値であり、後者が最大値である他ありません。

しかもこの最大値・最小値は同時に極値でもあったので、結局これらが求める極値である事が分かります。

$(\pm1,\mp\sqrt{3})$ において極小値 0　（複号同順）
$(\pm\sqrt{3},\pm1$ において極大値 16　（複号同順）

□

基本演習 4 条件 $x^2+y^2-1=0$ の下で、関数 $f(x,y)=3x-y$ が極値をとり得る点をすべて求め、その点で極大か極小かも判定して下さい。

【解答例】　$p(x,y)=x^2+y^2-1$ と置けば条件式は $p(x,y)=0$ と書けます。

$p_x=2x, p_y=2y$ ですから、$\mathrm{grad}p(x,y)=\mathit{o}$ となるのは原点のみですが、原点は条件式 $p(x,y)=0$ を満たしませんから曲線 $p(x,y)=0$ 上には特異点はありません。

すると Lagrange の乗数法によって、題意の極値の候補点は $\mathrm{grad}f(x,y)=t\mathrm{grad}p(x,y)$ となる様な定数 t が存在する様な点のみであることが分かります。

これを具体的に成分で書いたものと条件式 $p(x,y)=0$ を連立させて方程式：

$$3=2tx,\quad -1=2ty,\quad 1=x^2+y^2$$

が得られます。

第１式の両辺をそれぞれ第２式の両辺で割れば $-3=\frac{x}{y}$、すなわち $x=-3y$ が分かりますからこれを第３式に代入すれば $y=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ が得られ、このとき $x=\mp\frac{3}{\sqrt{10}}$ です（複号同順）。

以上により極値の候補点は２点 $\left(\pm\frac{3}{\sqrt{10}},\mp\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ のみです。

条件式が表す曲線は円周であり、連続関数 $f(x,y)$ は円周上での最大値と最小値を必ずもち、かつ、それらは同時に極値でもありましたから、この最大値・最小値はさっき求めた極値の候補点の中になければなりません。

そこで２点での関数の値を見てみると

$$f\left(\pm\frac{3}{\sqrt{10}},\mp\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\pm\sqrt{10} \quad (\text{複号同順})$$

ですからこれが最大値・最小値に他なりません。同時にこれは極値ですから求める極値は次の通り：

極大値：点 $\left(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ での $\sqrt{10}$

極小値：点 $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ での $-\sqrt{10}.$

□

基本演習 5 xy 平面上の点 (x,y) が $\phi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ で表される曲線上を動くとき、関数 $Z=f(x,y)=x+2y+5$ が極値をとる点 (x,y) とその極値を求めて下さい。

【解答例】　$\phi_x=2x, \phi_y=2y$ ですから、$\mathrm{grad}\phi(x,y)=o$ となるのは原点のみですが、原点は条件式 $\phi(x,y)=0$ を満たしませんから曲線 $\phi(x,y)=0$ は特異点をもたないことが分かります。

すると Lagrange の乗数法によって、題意の極値の候補点は $\mathrm{grad}f(x,y)=k\,\mathrm{grad}\phi(x,y)$ となる様な定数 k が存在する点のみであることが分かります。

これを具体的に成分で書いたものと点 (x,y) が条件を満たすと云う式を連立させて方程式：

$$1=2kx,\quad 2=2ky,\quad 1=x^2+y^2$$

が得られます。

第２式の両辺をそれぞれ第１式の両辺で割れば $2=\frac{y}{x}$、すなわち $y=2x$ が分かりますからこれを第３式に代入すれば $x=\pm\frac{1}{\sqrt5}$ が得られ、このとき $y=\pm\frac{2}{\sqrt5}$ です（複号同順）。

以上により極値の候補点は２点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt5},\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)$ のみです。

条件式が表す曲線は円周であり、連続関数 $f(x,y)$ は円周上での最大値と最小値を必ずもち、かつ、それらは同時に極値でもありましたから、この最大値・最小値はさっき求めた極値の候補点の中になければなりません。

そこで２点での関数の値を見てみると

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt5},\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)=5\pm\sqrt5\quad（複号同順）$$

ですからこれが最大値・最小値に他なりません。同時にこれは極値ですから求める極値は次の通り：

極大値：点 $\left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right)$ での $5+\sqrt5$

極小値：点 $\left(-\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5}\right)$ での $5-\sqrt5.$

□

基本演習 6 $x^2+y^2=1$ のもとで、$f(x,y)=x^2+4\sqrt2xy+3y^2$ の最大値、最小値、およびそれらを与える x,y を求めて下さい。

【解答例】　$p(x,y)=x^2+y^2-1$ と置けば条件式は $p(x,y)=0$ と書けます。まずは関数 $f(x,y)$ の条件 $p(x,y)=0$ の下での極値の候補点を求めておきます。

$\mathrm{grad}p(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$ であることと原点が条件式 $p(x,y)=0$ を満たさないことから条件式の表す曲線上には特異点は無いことが分かります。

すると Lagrange の乗数法によって、題意の条件のもとでの極値の候補点は $\mathrm{grad}f(x,y)=t\,\mathrm{grad}p(x,y)$ となる様な定数 t が存在するような点のみであることが分かります。

これを具体的に成分で書いたものと条件式を連立させて方程式：

$$2x+4\sqrt2y=2tx,\quad 4\sqrt2x+6y=2ty,\quad 1=x^2+y^2$$

が得られます。（両辺２で割った上で）第１、２式から

$$\begin{pmatrix}1&2\sqrt2\\2\sqrt2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ですので左辺の係数行列の長さ１の固有ヴェクターを求めれば良い事が分かります。

$$0=\begin{vmatrix}1-t&2\sqrt2\\2\sqrt2&3-t\end{vmatrix}=t^2-4t-5=(t-5)(t+1)$$

から固有値は $-1,5$ ですのでそれぞれについて固有ヴェクターを求めましょう。

【固有値 -1 について】

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2\sqrt2\\2\sqrt2&3\end{pmatrix}+E\right\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\sqrt2\\2\sqrt2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

から連立方程式：

$$x+\sqrt2y=0,\quad \sqrt2x+2y=0$$

が得られますがこれは同じ式ですから

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt2y\\y\end{pmatrix}//\begin{pmatrix}-\sqrt2\\1\end{pmatrix}$$

となって長さ１の固有ヴェクターは $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ です。

【固有値 5 について】

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\sqrt{2}\\2\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}-5E\right\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2\sqrt{2}\\2\sqrt{2} & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

から連立方程式：

$$-4x+2\sqrt{2}y=0,\quad 2\sqrt{2}x-2y=0$$

が得られますがこれは同じ式ですから

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\\sqrt{2}x\end{pmatrix}//\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

となって長さ１の固有ヴェクターは $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ です。

以上から極値の候補点は４点：$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，　$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ です（複号同順)。

条件式が表す曲線は円周であり、連続関数 $f(x,y)$ は円周上での最大値と最小値を必ずもち、かつ、それらは同時に極値でもありましたから、この最大値・最小値はさっき求めた極値の候補点の中になければなりません。

そこで４点での関数の値を見てみると

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-1,\quad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=5$$

ですから、前者の２点で最小値であり後者の２点で最大値である事が分かります。従って求める最大値・最小値は次の通り：

最大値：点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ での 5

最小値：点 $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ での $-1.$

□

基本演習 7 $x^2+y^2+z^2=1$ として、$f(x,y,z)=x+y^2+z^3$ の最大値と最小値を求めて下さい。

【解答例】　$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ と置けば条件式は $g(x,y,z)=0$ と書く事が出来ます。

$\mathrm{grad}\,g(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$ ですからこれが o となるのは原点に於いてのみですが、原点は条件式 $g(x,y,z)=0$ を満たしていません。すると Lagrange の未定乗数法によって極値の候補点は $\mathrm{grad}\,f(x,y,z)=w\,\mathrm{grad}\,g(x,y,z)$ となる様な定数 w が存在する点のみである事が分かります。

これを具体的に成分で書いて条件式と連立させれば

$$\begin{cases}1=2wx\\2y=2wy\\3z^2=2wz\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

が得られますのでこれを解いて極値の候補点を求めます。

第２式の形から y が 0 であるかないかで分類してみましょう。

$y=0$ の時は

$$1=2wx,\quad z(3z-2w)=0,\quad x^2+z^2=1$$

となり、更に z で分類します。

$z=0$ の時は、$x=\pm1$ であって $(x,y,z)=(\pm1,0,0)$ です。

$z\neq0$ の時は、$xz=\frac{1}{3}$ なので、

$$(x+z)^2=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3},\quad すなわち、\quad x+z=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

ですから２次方程式 $t^2\pm\sqrt{\frac{5}{3}}t+\frac{1}{3}=0$ の解を求めてみると

$$0=t^2\pm\sqrt{\frac{5}{3}}t+\frac{1}{3}=\left(t\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2-\frac{1}{12}$$

となって $t = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$ ですから、(x, y, z) は

$$\left(\frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\mp 1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right), \quad \left(\frac{\pm 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\mp 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right)$$

です（複号同順）。

$y \neq 0$ の時は、$w = 1$ が分かりますから

$$1 = 2x, \quad z(3z-2) = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

を解けば良く、まず $x = \frac{1}{2}$ であり、$z = 0, \frac{2}{3}$ ですから (x, y, z) は

$$\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{2}{3} \right)$$

です。以上から極値の候補点は 10 点です。

条件式が表す曲面は球面であり、連続関数 $f(x, y, z)$ は球面上での最大値と最小値を必ずもち、かつ、それらは同時に極値でもありましたから、この最大値・最小値はさっき求めた極値の候補点の中になければなりません。そこで 10 点での関数の値を見てみると

$$f(\pm 1, 0, 0) = \pm 1$$
$$f\left(\frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\mp 1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{5\sqrt{5} \mp 1}{6\sqrt{3}}$$
$$f\left(\frac{\pm 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{\mp 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{-5\sqrt{5} \mp 1}{6\sqrt{3}}$$
$$f\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) = \frac{5}{4}$$
$$f\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{2}{3} \right) = \frac{119}{108}$$

ですから最小値は点 $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right)$ での $-\frac{5\sqrt{5}+1}{6\sqrt{3}}$ であり、最大値は 2 点 $\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$ での $\frac{5}{4}$ です。 □

基本演習 8 条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ のもとで、$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ の最大値、最小値を求めてください。ただし $a > b > c > 0$ とします。

$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ とします。

$$\mathrm{grad} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}, \quad \mathrm{grad} g = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} x \\ \frac{2}{b^2} y \\ \frac{2}{c^2} z \end{pmatrix}$$

曲線 $g = 0$ 上には $\mathrm{grad} g = \mathit{o}$ となる点（原点のみです）はありませんから、Lagrange の乗数法により、件の条件付きの極値の候補点は連立方程式：

$$\begin{cases} 2x = \frac{2w}{a^2} x \\ 2y = \frac{2w}{b^2} y \\ -2z = \frac{2w}{c^2} z \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

の解 (x, y, z, w) のうちの (x, y, z) です。

$x = 0$ の時、更に $y = 0$ であれば第４式から $z = \pm c$、第３式から $w = -c^2$ です。一方 $y \neq 0$ であれば第２式から $w = b^2$ であり、これを第３式に代入して $-z = \frac{b^2}{c^2} z$ すなわち $z = 0$ を得ます。以上から $(x, y, z) = (0, 0, \pm c), (0, \pm b, 0)$ が候補点です。

同様に、x, y, z のうち２つは必ず 0 でなくては連立方程式を満たさないので極値の候補点は上の他に $(\pm a, 0, 0)$ があります。

各候補点での f の値は次の通り：

$$f(\pm a, 0, 0) = a^2, \quad f(0, \pm b, 0) = b^2, \quad f(0, 0, \pm c) = -c^2.$$

条件式の表す曲面は楕円面であり、有界閉曲面です。連続関数の性質によれば f はこの条件の下での最大値と最小値を必ずもち、同時にそれらは極値でもあります。

すると、極値であるが故にその最大値・最小値は今求めた極値の候補点の中にあることが分かり、明らかに $f(\pm a, 0, 0) = a^2$ が最大値、$f(0, 0, \pm c) = -c^2$ が最小値です。 □