

3 条件付きの極値問題 その3 Lagrange の未定乗数法

3.1 Lagrange の未定乗数法

条件付きの極値問題に於ける候補点（1階微分が0になる点に相当）の条件式は多変数の場合に gradient の平行と云う形で拡張されることを見ました。

普通、2つのベクトルが平行と云う事を『一方が他方の定数倍である』と云う風に解釈して次の様に定式化します：

定理 3.1 [Lagrange の未定乗数法] 条件 $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ のもとで $F(x_1, \dots, x_n)$ が極値をとる可能性があるのは次の2種類の点のみです：

- (i) $G = 0$ となる点で $\text{grad}G = \mathbf{0}$ であるもの（特異点）
- (ii) $G = 0$ となる点で $\text{grad}F = p \text{grad}G$ となる様な実数 p が存在するもの

3.1.1 注意その1

本当は(ii)に『特異でない点で』の一言を入れても良いのですが、そこを気にしながら解くのも面倒なので削りました。従って(i)、(ii)の双方に属する点もあり得ます。

3.1.2 注意その2 $\text{grad}F = p \text{grad}G$ か、 $\text{grad}G = p \text{grad}F$ か

2つのベクトルが平行である事を(ii)の式で $\text{grad}F = p \text{grad}G$ としたわけですが、これを $\text{grad}G = p \text{grad}F$ としてはいけないのでしょうか？

$G(x, y) = (x-2)^2x - y^2$, $F(x, y) = x^2 + y^2$ の場合で具体的に見てみましょう。

$$\begin{cases} \text{grad}F = p \text{grad}G \\ G = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = p(3x^2 - 8x + 4) & \cdots (1) \\ 2y = -2py & \cdots (2) \\ (x-2)^2x - y^2 = 0 & \cdots (3) \end{cases}$$

となり、 $(x, y) = (0, 0)$ は ($p = 0$ とすることによって) 解になっています。

一方、

$$\begin{cases} \text{grad}G = p \text{grad}F \\ G = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 8x + 4 = 2px & \cdots (4) \\ -2y = 2py & \cdots (5) \\ (x-2)^2x - y^2 = 0 & \cdots (6) \end{cases}$$

であり、 $(x, y) = (0, 0)$ は明らかに(4)を満たしません。

この様にどちらを選択するかで極値の候補点が違ってきますが、 $F(x, y)$ が原点で最小値になっていることは自明ですから正しいのは前者です。

なぜこの違いが生まれてしまったかと言うと、まず前者では $\text{grad}F = \mathbf{0}$ となる点を全て含んでいましたが、後者では $\text{grad}F = \mathbf{0}$ だと自動的に左辺も $\text{grad}G = \mathbf{0}$ になってしまい、 $\text{grad}F = \mathbf{0}$ かつ $\text{grad}G \neq \mathbf{0}$ である点を逃してしまっています。で、そのような点で極値をとる場合もありますから後者では駄目だと云う事なのです。

以上のような事情から、(i)を『 $\text{grad}G = \mathbf{0}$ または $\text{grad}F = \mathbf{0}$ となる点』とするのであれば、(ii)は $\text{grad}F = p \text{grad}G$ でも、 $\text{grad}G = p \text{grad}F$ でもどちらでも構いません。

3.1.3 注意その3

p も変数と思って $n+1$ 変数の関数 $L(x_1, \dots, x_n, p) = F(x_1, \dots, x_n) - pG(x_1, \dots, x_n)$ を考えれば、 $L_p = -G$ ですから

$$\text{grad}L = \mathbf{0} \iff \text{grad}F - p \text{grad}G = \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad G = 0$$

となり、(ii)の条件は一言 $\text{grad}L = \mathbf{0}$ で書けてしまいます。この流儀で書かれている教科書も多いでしょう。

例題 3.2 条件 $G(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$ のもとでの関数 $F(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ の極値の候補点リストを作ってください。ただし、 a, b, c のうち少なくとも1つは0でないとします。

$$\text{grad}F = \begin{pmatrix} 2(x - x_0) \\ 2(y - y_0) \\ 2(z - z_0) \end{pmatrix}, \quad \text{grad}G = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ですから、 $\text{grad}G = \mathbf{0}$ となる特異点はありません。従って極値の候補は次の連立方程式の解（のうち (x, y, z) ）です：

$$\begin{cases} 2x - 2x_0 = pa \\ 2y - 2y_0 = pb \\ 2z - 2z_0 = pc \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

第1式から $x = \frac{p}{2}a + x_0$ であり、全く同様に第2・3式から $y = \frac{p}{2}b + y_0$, $z = \frac{p}{2}c + z_0$

が分かりますから、これらを第4式に代入すれば

$$a\left(\frac{p}{2}a + x_0\right) + b\left(\frac{p}{2}b + y_0\right) + c\left(\frac{p}{2}c + z_0\right) + d = 0$$

$$\frac{p}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$$

$$p = -2\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

が得られます。以上から連立方程式の解は

$$\left(-a\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} + x_0, -b\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} + y_0, -c\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} + z_0\right)$$

のみです。□

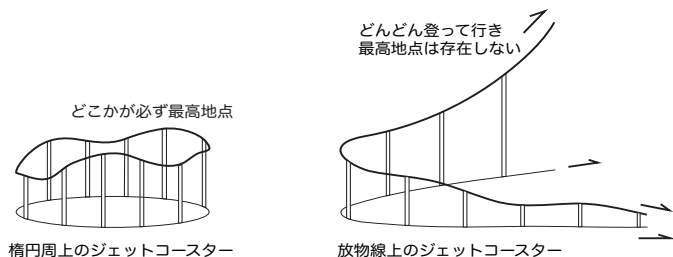
基本演習 1 $G(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$ と云う条件のもとでの関数 $F(x, y) = xy$ の極値の候補点リストを作ってください。

3.2 最大値・最小値の存在

基本演習 1 では極値の候補点までは求まっているわけですから、当然次にやらねばならないことはこの候補点の中に本当に極値はあるのか、あるとすればそれは極大なのか、極小なのかを判別することです。

もちろん2変数の問題であればローカルに1変数化して2階微分を計算すれば良いのですが、3変数以上の場合にも通用する方法も考えなければなりません。完全な解決策ではありませんが、場合によっては有効な方法がありますのでそれを見て行きましょう。

地面に描いた条件式の表す曲線 $G(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 4 = 0$ 楕円周ですね)の上に柱を立てて、滑らかなジェットコースターのコースを作ります(ジャンプとかは無しですよ)。1周コースを造った時に、当然ですがどこかに一番高いところがある筈です。



しかし例えば最初に地面に描いた曲線が放物線だったら、端の方に(端はないですが)行くにつれてどんどん高くなって行く様に設計することが出来、最高地点(同様に最低地点も)があるとは限りません。

この『楕円と放物線の違い』が重要です。更に言えば、一般に楕円周の様にぐるっと1周つながっている曲線のことを閉曲線と言いますが、閉曲線上のジェットコースターを考えても同じですから、

閉曲線上のジェットコースターには必ず最高点・最低点がある

と言って良いはずですが。これをもう少し数学的に表現してみましょう。

まずこのコースの各地点での高さは関数 $F(x, y)$ で表されるわけですが、コースはなめらかに“つながっている”わけですから、これは連続関数です。

また、コースは地面に書かれた曲線 $G(x, y) = 0$ の上に作られていますから、コースの各点での高さを考える事は、 $G(x, y) = 0$ を満たすような点 (x, y) (だけ)で2変数関数 $F(x, y)$ を見ていることになり、これは条件 $G(x, y) = 0$ の下での関数 $F(x, y)$ の値を考えていることに他なりません。従って、

$G(x, y) = 0$ の表す曲線が閉曲線であるならば、連続関数 $F(x, y)$ は条件 $G(x, y) = 0$ のもとでの最大値・最小値を必ずもつ

と言っているわけです。

更に、一般には最大値が極大値であるとは限りません(定義域の端点での最大値など)が、今考えている様な閉曲線上で定義された関数の場合は、最大値は必ず極大値であり、最小値は必ず極小値になっていますので結局次のようにまとめる事が出来ます。

定理 3.3 [閉曲線上での連続関数の性質] $G(x, y) = 0$ の表す曲線が閉曲線である時、条件 $G(x, y) = 0$ のもとでの連続関数 $F(x, y)$ の最大値・最小値は必ず存在し、同時にそれらは極大値・極小値でもある。

3.3 極値の確定

この閉曲線上での連続関数の性質を使うと、既に求めてある候補の中から実際の極値を直ちに確定出来る場合があります。

関数 $F(x, y) = xy$ が条件 $G(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$ のもとで極値をとる可能性があるのは4点 $(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ (複号同順でない) でした。

しかし、今考えている条件式の表す曲線は楕円周 (即ち閉曲線) ですから、連続関数 $F(x, y)$ はこの楕円周上で必ず最大値と最小値を達成し、また、それらは同時に極値である事が分かります。

そうするとそれら最大値・最小値は極値であるが故にさっき求めた4つの候補点の中のどれかでなければなりません。そこで4点での関数 $f(x, y)$ の値を調べると、

$$F\left(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1, \quad F\left(\pm\sqrt{2}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 \quad (\text{それぞれ複号同順})$$

なので、この前者が最大値 (かつ極大値) であり、後者が最小値 (かつ極小値) である他ありません。他に極値となりうる点はありませんから結局これらが求める極値の全てである事が分かります。

当然ですが、条件式の表す曲線が放物線や双曲線であるときにはこの連続関数の性質は使えませんので極値をこの方法で確定することはできません。

また、候補点での関数の値のヴァリエーションが3種類以上あるときにも、最大値でも最小値でもない点に関しては、極値であるかどうか何も言えません。

しかし少なくとも『最大値・最小値を求めよ』と云うタイプの問題に対しては、この方法が非常に有効である場合があります。

3.4 3変数の場合

3変数関数 $G(x, y, z)$ に対して方程式 $G(x, y, z) = 0$ を満たす点の全体は一般には曲面になります。例えば $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ は球面を表しています。

2変数の時に閉曲線上の連続関数の性質を使って最大値等を決定しましたが、3変数の場合には同様に『閉曲面』上の連続関数の性質が重要になります。ここでは特に楕円面に限定しておきます。

正の定数 a, b, c に対して方程式 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ が表す曲面を楕円面と言います。楕円面上の連続関数 $F(x, y, z)$ を考えることは、歪んだ地球で各点での標高を考えている様なもので、どんな地形を考えたとしても、必ずどこかが最高地点・最低地点になっています。従って次の事が分かります：

事実 3.4 楕円面 (本当は“閉曲面”で良い) 上で定義された連続関数は最大値と最小値を必ずもち、それらは同時に極値でもあります。

これを3変数関数に対する Lagrange の定理で得た極値の候補リストに対して適用して、最大値・最小値あるいは極値等を確定させる事が出来る場合があります。

3.5 その他の理由で極値の存在が保証される場合

例題 3.5 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離を求めてください。

これが『平面だ』と言っている以上、 $a = b = c = 0$ ではないことに注意します。

点 P から平面へ下ろした垂線の足を H としたとき、平面上の点 $X(x, y, z)$ と点 P との距離 $PX = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ は H において最小値をとります。これは自明として良いでしょう。そうすると、次のような問題を考えたとき：

例題 3.6 条件 $G(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$ のもとでの関数 $F(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ の最小値を求めてください。

問われている最小値は存在すると言えます (根号が嫌なので距離の自乗 $F = D^2$ を考えています)。この最小値を求めて平方根を取れば、点と平面の距離が求まるはずです。

この条件付き最小値問題の条件式が表す曲面は平面であって所謂『閉曲面』ではないため、先に見たような『閉曲面上の連続関数の性質』を使うことは出来ません。しかし、幸いなことに、今見たような特別な事情によってその最小値が存在することは分かっています。しかも、その達成点は条件式の表す平面の『内部の点』ですから (もっとも、平面に『端』はありませんが)、この最小値は同時に極小値でもあります。

すると、先の例題 3.2 で求めた極値の候補点リストの中にこの最小値 (かつ極小値) が含まれていることになり、リストが1点

$$\left(-a \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} + x_0, -b \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} + y_0, -c \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} + z_0\right)$$

のみだったので、この点で最小値であることが分かってしまいます。従って F の最小値は

$$\frac{(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

であり、これの平方根が求める点と平面の距離となります。

このように、何も閉曲面や閉曲線上の連続関数の性質を持ち出さなくても、目的の極値、最大値・最小値が存在していることが分かっているのであれば、何とかなくなってしまいう場合があります。

Exercise

基本演習 2 条件 $G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2 = 0$ のもとでの関数 $F(x, y, z) = z$ の最大値・最小値を求めてください。ただし、最大値・最小値は存在し、同時に極値にもなっているものとします。

基本演習 3 Lagrange の未定乗数法により、 $G(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ と云う条件のもとでの $F(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2$ の極値を求めて下さい。

基本演習 4 条件 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で、関数 $f(x, y) = 3x - y$ が極値をとり得る点をすべて求め、その点で極大か極小かも判定して下さい。

基本演習 5 xy 平面上の点 (x, y) が $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ で表される曲線上を動くとき、関数 $Z = f(x, y) = x + 2y + 5$ が極値をとる点 (x, y) とその極値を求めて下さい。

基本演習 6 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで、 $f(x, y) = x^2 + 4\sqrt{2}xy + 3y^2$ の最大値、最小値、およびそれらを与える x, y を求めて下さい。

基本演習 7 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ として、 $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ の最大値と最小値を求めて下さい。

基本演習 8 条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ のもとで、 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ の最大値、最小値を求めてください。ただし $a > b > c > 0$ とします。