

4 条件付きの極値問題 その4 問題演習

4.1 まとめ

条件付き極値問題 候補点の選定

定理 4.1 [Lagrange の未定乗数法] 条件 $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ のもとで $F(x_1, \dots, x_n)$ が極値をとる可能性があるのは次の2種類の点のみです：

- (i) $G = 0$ となる点で $\text{grad}G = \mathbf{0}$ であるもの (特異点)
- (ii) $G = 0$ となる点で $\text{grad}F = p \text{grad}G$ となる様な実数 p が存在するもの

条件付き極値問題 極値判定

定理 4.2 [閉曲線上での連続関数の性質] $G(x, y) = 0$ の表す曲線が閉曲線である時、条件 $G(x, y) = 0$ のもとでの連続関数 $F(x, y)$ の最大値・最小値は必ず存在し、同時にそれらは極大値・極小値でもあります。

事実 4.3 [閉曲面での連続関数の性質 3次元の場合] 楕円面 (本当は“閉曲面”で良い) 上で定義された連続関数は最大値と最小値を必ずもち、それらは同時に極値でもあります。

事実 4.4 [有界閉集合上の連続関数の性質] 有界閉集合上で定義された連続関数は最大値・最小値を必ずもちます。

*『有界』とは、ある半径の (n 次元) 球内にすっぽり入ってしまうことであり、『閉集合』とは、閉区間のように、その境界を含む集合のこと。

ローカルな1変数化 陰関数定理

事実 4.5 [陰関数定理] $G(x, y)$ は C^2 -級であるとします。曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) において $G_y(a, b) \neq 0$ であるならば、(曲線上の) この点の近くでは y は x の2階微分可能な関数として表すことができます。

曲線 $G(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) において $G_x(a, b) \neq 0$ であるならば、(曲線上の) この点の近くでは x は y の2階微分可能な関数として表すことができます。

* C^2 -級とは、2階偏微分可能であって、各偏導関数が連続なこと。

C^2 -級であれば、連続関数であり、全微分可能であり、合成関数の微分規則が使い、高次の偏微分が順序によりません。

1変数関数の極値問題

事実 4.6 [1階微分による候補点の選定]

前提条件： 関数 $V(x)$ は微分可能。

主張内容： $V(x)$ の極値の候補点は $V'(x) = 0$ となる点のみ。

事実 4.7 [2階微分による判定]

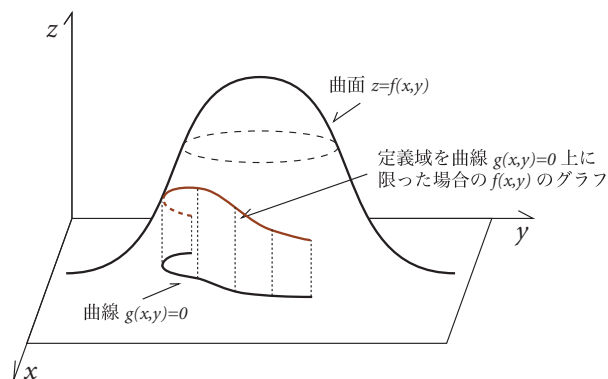
前提条件：

- (i) $V'(a) = 0$ 。
- (ii) 関数 $V(x)$ は点 a の近くで2階微分可能、各導関数は連続。

主張内容：

- (i) $V''(a) > 0$ ならば V は点 a で極小値であり、
- (ii) $V''(a) < 0$ ならば V は点 a で極大値です。
- (iii) $V''(a) = 0$ の場合は不明です。

4.2 登山と地形図

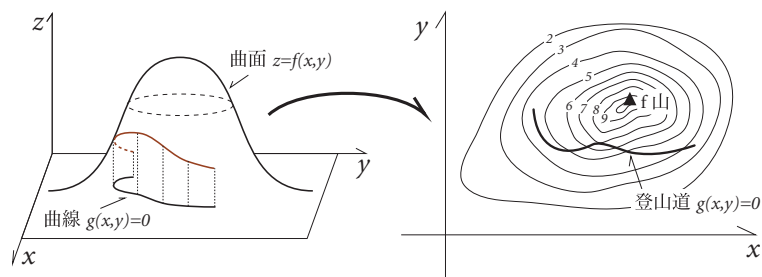


関数 $z = f(x, y)$ のグラフを山だと思しましょう。

で、その山の中腹に曲線がへばりついていますが、これは“山の表面”にある曲線ですから、まあ、登山道だと考えてみましょう。

この登山道上の点の z -座標、すなわち“標高”が関数 f の値になっているわけですから、条件 $g(x, y) = 0$ の下での関数 $f(x, y)$ の極値を求める問題は、道中での標高の極値を求めなさいと言う風に読み替える事が出来、大雑把に言えば『この登山道に沿って f 山を登山する時に、標高の最高点はどこですか？』と言う風な問題だと捉える事が出来ます。

そうですか、登山ですか。じゃあ、登山に必要な装備を整えなくてはなりませんね。登山に必要なものと云えば、リュックに水筒、あとおやつ 300 円以内ですか？え、違う？いやいや、登山の時に大切なものは何と言っても地形図です。



実際の山の斜面上にある登山道を地図上で見ると、その xy -平面への射影である曲線 $g(x, y) = 0$ で表現されることに注意しましょう。

4.3 等高線と登山道の関係

地形図内にある同心円風の曲線群は所謂等高線と云うもので、これは同じ高さの点を結んで得られる曲線です。

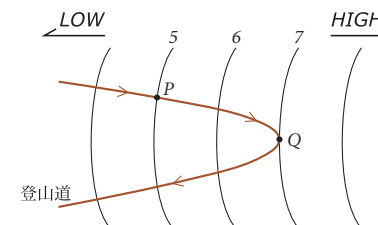
今回の f 山（すなわち、 $z = f(x, y)$ のグラフ）の場合、 (x, y) での（これは東経・北緯に相当しますね）標高は $f(x, y)$ で与えられているわけですから、例えば高さが 3 の等高線は方程式： $f(x, y) = 3$ 、つまり $f(x, y) - 3 = 0$ です。

また、点 (a, b) における標高は $f(a, b)$ ですから、この点を通る等高線は方程式：

$$f(x, y) - f(a, b) = 0$$

の表す曲線となります。

さっきの地形図をもっと大雑把に書けば下図のようになっています：



ここで 2 つの点 P, Q に注目して下さい。

2 点の違いは何かと云うと、点 P では登山道は等高線と“普通に”交わっています。点 Q では登山道と等高線が接しています。この違いは何を意味するのでしょうか。

まず点 P ですが、図中の矢印の様に登ったとすると、点 P に近づくにつれて標高はだんだんと高くなって行き、点 P で標高は 5 になりますが、その後もまた登り続けて標高 6 の方へ進んでいます。つまりこの点 P は単なる“坂の途中”であって、標高が極大あるいは極小になったりしていません。

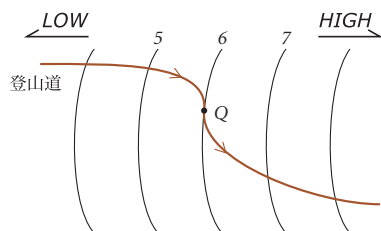
この様に登山道と等高線が交差する点では、標高は極値にはなりません。

一方点 Q に近づくにつれて標高はだんだんと高くなって行き、点 Q で標高は 7 になりますが、その後は等高線と言って 6 と 7 の間を進んでいますから、点 Q から今度は下っていることが分かる筈です。このとき、標高は点 Q で極大となっています。

この様に、登山道上で標高が極大／極小となる点では必ず登山道と等高線が接していなければなりません。

極値 $\Rightarrow$ 登山道と等高線が接している

しかしこの逆、『登山道と等高線が接している $\Rightarrow$ 極値』は残念ながら成り立ちません。なぜなら下図の様な登山道で登ることもあるからです：



この例では点 Q に向けて登って行って標高 6 に達しますが、その後更に高い方へと進んでいますからやはりこの点は単なる“登っている途中”に過ぎません。

4.4 数式による記述

2つの曲線（登山道と等高線）が接すると云う事を数式で表すとどうなるでしょうか。

一般に曲線 $F(x, y) = 0$ 上の点 (a, b) に於ける曲線の接線の方法ベクトルは $\begin{pmatrix} f_y(a, b) \\ -f_x(a, b) \end{pmatrix}$ であり、法線ベクトルは $\text{grad}F(a, b) = \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix}$ で与えられます。

接すると云うことは共通の接線をもつと云う事ですから、当然接線の方法ベクトルは平行であり、同時に法線ベクトルも平行です。どちらで計算しても良いのですが、法線ベクトルの方が記述がすっきりしますのでこちらで行きましょう。

まず登山道ですがこれは $g(x, y) = 0$ と表されていますので登山道上の点 (a, b) での法線ベクトルは $\text{grad}g(a, b)$ です。

一方、点 (a, b) での等高線は $f(x, y) - f(a, b) = 0$ でしたから、

$$\{f(x, y) - f(a, b)\}_x = f_x(x, y) - 0, \quad \{f(x, y) - f(a, b)\}_y = f_y(x, y) - 0$$

に注意すればこの等高線の点 (a, b) での法線ベクトルは $\text{grad}f(a, b)$ です。

これらが平行と云うことは、一方が他方の定数倍となると云うことですから

$$\begin{array}{ll} f(x, y) \text{ は点 } (a, b) \text{ で条件} & \Rightarrow \text{grad}f(a, b) = p \text{ grad}g(a, b) \\ g(x, y) = 0 \text{ のもとでの極値} & \text{となる様な実数 } p \text{ が存在する} \end{array}$$

となっています。

課題 第 1 回

以下の問題を自分で考えて自筆にて解答してください。

課題 1.1 条件 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ の下での関数 $f(x, y, z) = xyz$ の最大値と最小値を求めて下さい。

課題 1.2 条件 $x^2 - 4x + 2y^2 - 4y + 3 = 0$ の下での関数 $f(x, y) = x + 2y$ の最大値と最小値を求めて下さい。

課題 1.3 条件 $y^2 - x^2 + 1 = 0$ の下での関数 $f(x, y) = x^3 + 2y$ の極値を求めて下さい。

Exercise

基本演習 1 $x^2 + y^2 = 1$ のとき、関数 $f(x, y) = x^3 + \frac{1}{2}y^2 - 2x$ の最大値と最小値を求めて下さい。

基本演習 2 条件 $x^2 - 4x + 2y^2 - 4y + 3 = 0$ のもとで、関数 $g(x, y) = x + 2y$ の最大値と最小値を求めて下さい。

基本演習 3 $\mathbb{R}^3$ のデカルト座標を x, y, z とします。 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の拘束条件のもとで、関数 $f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz$ の最大値、最小値とそれらを与える (x, y, z) を求めて下さい。

基本演習 4 変数 x, y, z が条件 $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$ を満たしながら動くときの関数 $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ の最大値と最小値を求めて下さい。また、対応する x, y, z の値も書いて下さい。

基本演習 5 条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ のもとで、 $F(x, y, z) = lx + my + nz$ (l, m, n は定数) の最大値、最小値を求めて下さい。

基本演習 6 実変数 x, y, z が $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ を満たすとき $f(x, y, z) = xyz$ の最大値と最小値を求め、その時の x, y, z の値を示して下さい。

基本演習 7 $f(x, y) = x^2 + xy$ とします。 $x^2 + y^2 = 4$ を満たす (x, y) での $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めて下さい。

基本演習 8 $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0, x, y \geq 0$ の条件の下で関数 $f(x, y) = xy$ の最大値と最小値を求めて下さい。

基本演習 9 関数 $f(x, y) = x^{0.6}y^{0.4}$ の値を、条件 $x + y = 4, x \geq 0, y \geq 0$ のもとで最大化する x と y の値を求めて下さい。

基本演習 10 x - y 平面上の半楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \quad (x \geq 0) \cdots (i)$$

と x, y の関数 $z(x, y) = 2 + xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ を考えます。ただし、半楕円上の点 (x, y) に対し、原点と点 $(\frac{x}{2}, y)$ を結ぶ線分が x -軸となす角 θ とします。次の問に答えて下さい

(1) θ を媒介変数とする半楕円 (i) の媒介変数方程式を求めてください。 θ のとる範囲も明示するようにして下さい。

(2) 条件 (i) のもとでの関数 $z(x, y)$ の極値を求めるために、関数 $z(x, y)$ を θ のみの関数として表して下さい。

(3) 前問で得られた θ の関数 $f(\theta)$ が極値をとる $\cos \theta, \sin \theta$ の値を求めて下さい。

(4) $f(\theta)$ の極値を求めて下さい

(5) $f(0), f(\pm \frac{\pi}{4}), f(\pm \frac{\pi}{2})$ を求めて下さい。

(6) $f(\theta)$ のおよそのグラフを描いて下さい。

(7) 媒介変数 θ を用いずに、条件 (i) のもとでの関数 $z(x, y)$ の極値を、ラグランジュの乗数法で求めたいと思います。極値をとる (x, y) の値を求めるための条件式を書いて下さい。

(8) 極値をとる (x, y) の値を求めてください。

発展演習 11 実変数 x, y の関数 $f(x, y) = x^3 - y^2$ について以下の問に答えて下さい。

(1) (x, y) が実平面全体をうごくとき、 $f(x, y)$ の臨界点 ($f_x = f_y = 0$ となる点) をすべて求めて下さい。

(2) 点 (x, y) が円 $x^2 + y^2 = 1$ の上をうごくとき、関数 $f(x, y)$ の最大、最小とそのときの x, y の値を求めて下さい。

発展演習 12* $x^2 + y^2 = 1$ の条件のもとで、関数 $f(x, y) = x^3 + y^3$ の極値を (ラグランジュの乗数法を用いて) 求めて下さい。

発展演習 13* 関数 $f(x, y) = 3x^2y$ について、条件 $2x^4 + y^4 = 48$ の下での $f(x, y)$ の極値を求めよ。

Exercise 解答例

基本演習 1 $x^2 + y^2 = 1$ のとき、関数 $f(x, y) = x^3 + \frac{1}{2}y^2 - 2x$ の最大値と最小値を求めて下さい。

【解答例】 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とおけば条件式は $g(x, y) = 0$ と書けます。 $g_x = 2x, g_y = 2y$ であって $\text{grad}g = \mathbf{o}$ となるのは原点のみですが、原点は条件式を満たしていません。従って Lagrange の定理から、この条件下で f が極値となるのは $\text{grad}f = w\text{grad}g$ となるような実数 w が存在するような点のみです。この式と条件式を連立させて方程式を解きます。

$$\begin{cases} 3x^2 - 2 = 2wx \\ y = 2wy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

第 2 式は $y(2w - 1) = 0$ と変形されますから場合分けします。

【 $y = 0$ のとき】 このとき第 3 式から $x = \pm 1$ です。いずれの場合も第 1 式を満たす実数 w が存在しています。従って 2 つの解 $(\pm 1, 0)$ が得られました。

【 $y \neq 0$ のとき】 この場合 $w = \frac{1}{2}$ です。従って第 1 式から

$$0 = 3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1)$$

となって $x = 1, -\frac{2}{3}$ が分かります。

$x = 1$ の場合は $y = 0$ なので既に見ました。一方 $x = -\frac{2}{3}$ のときは

$$y^2 = 1 - x^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

となって $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ です。従って新たに 2 つの解 $(-\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3})$ が得られました。

条件式の表す曲線は円周であり、円周上で連続関数は最大値と最小値をもち、それらは同時に極値でもありました。従って存在する最大値と最小値は今求めた極値の候補点の中にある筈です。

そこで候補点での関数の値を調べてみると

$$f(\pm 1, 0) = \mp 1, \quad f\left(-\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{71}{54}$$

となっていますから、最大値は $(-\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3})$ での $\frac{71}{54}$ 、最小値は $(1, 0)$ での -1 です。□

基本演習 2 条件 $x^2 - 4x + 2y^2 - 4y + 3 = 0$ のもとで、関数 $g(x, y) = x + 2y$ の最大値と最小値を求めて下さい。

【解答例】 $h(x, y) = x^2 - 4x + 2y^2 - 4y + 3$ と置きます。 $h_x = 2x - 4, h_y = 4y - 4$ ですから、 $\text{grad}h = \mathbf{o}$ となるのは $(2, 1)$ のみですが、この点は条件式を満たしません。従って Lagrange の定理からこの条件の下での極値の候補点は、 $\text{grad}g = w\text{grad}h$ となるような実数 w が存在する点のみです。条件式と合わせて具体的に書けば

$$\begin{cases} 1 = w(2x - 4) \\ 2 = w(4y - 4) \\ x^2 - 4x + 2y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

第 1 式から $x - 2 = \frac{1}{2w}$ 、第 2 式から $y - 1 = \frac{1}{2w}$ です。しかも第 3 式は

$$(x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 - 3 = 0$$

と変形されますから

$$\frac{1}{4w^2} + 2\frac{1}{4w^2} - 3 = 0$$

$$4w^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad w = \pm\frac{1}{2}$$

が分かります。従って 2 つの解 $(x, y) = (3, 2), (1, 0)$ が得られます。

条件式の表す曲線は円周であり、円周上で連続関数 $g(x, y)$ は最大値・最小値をとり、それらは同時に極値でした。従って極値であるが故にこの最大値・最小値は今求めた極値の候補点の中にある筈です。そこで候補点での関数の値を調べてみると

$$f(3, 2) = 7, \quad f(1, 0) = 1$$

ですから前者が最大値（かつ極大値）、後者が最小値（かつ極小値）です。□

基本演習 3 $\mathbb{R}^3$ のデカルト座標を x, y, z とします。 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の拘束条件のもとで、関数 $f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz$ の最大値、最小値とそれらを与える (x, y, z) を求めて下さい。

【解答例】 $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ と置けば条件式は $g(x, y, z) = 0$ と書く事が出来ます。

$\text{grad}g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ ですからこれが $\mathbf{0}$ となるのは原点に於いてのみですが、原点

は条件式 $g(x, y, z) = 0$ を満たしていません。すると Lagrange の未定乗数法によって極値の候補点は $\text{grad}f(x, y, z) = w \text{grad}g(x, y, z)$ となる様な定数 w が存在する点のみである事が分かります。これを具体的に書いて条件式と合わせれば

$$\begin{cases} 6x + 2y + 2z = 2wx \\ 2x + 4z = 2wy \\ 2x + 4y = 2wz \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

ですから、第1~3式の両辺を2で割って行列の形で書けば、行列 $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ の

長さ1の固有ベクトルを求めれば良い事が分かります (w は固有値に相当します)。

まず固有方程式は

$$0 = \begin{vmatrix} 3-w & 1 & 1 \\ 1 & -w & 2 \\ 1 & 2 & -w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-w & 1 & 1 \\ w-1 & -w & 2 \\ w-1 & 2 & -w \end{vmatrix}$$

ですから $w-1$ をくくり出して

$$0 = (w-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -w & 2 \\ 1 & 2 & -w \end{vmatrix} = (w-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-w & 3 \\ 0 & 3 & 1-w \end{vmatrix}$$

更に余因子展開すれば

$$0 = -(w-1) \begin{vmatrix} 1-w & 3 \\ 3 & 1-w \end{vmatrix} = -(w-1)(-w-2)(4-w)$$

ですから固有値は $1, -2, 4$ です。

【固有値1について】 固有ベクトルは $(M-E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ なるベクトル $\mathbf{x}$ を求めれば良く、これを成分で書けば

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

ですが、これは3本あるように見えても実質的には2本しかなく (具体的には第1式から第2式を引けば第3式になっています)、第1、2式をとって z を諦めて x, y を z で表す事にすれば、 $x = -z, y = z$ が得られますので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、長さ1の固有ベクトルは $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

【固有値-2について】 固有ベクトルは $(M+2E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ なるベクトル $\mathbf{x}$ を求めれば良く、これを成分で書けば

$$\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

ですが、第1、2式をとって y を諦めて x, z を y で表す事にすれば、 $x = 0, z = -y$ が得られますので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

より、長さ 1 の固有ベクトルは $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ です。

【固有値 4 について】 固有ベクトルは $(M - 4E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ なるベクトル $\mathbf{x}$ を求めれば良く、これを成分で書けば

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

ですが、これは 3 本あるように見えても実質的には 2 本しかなく（具体的には第 2、3 式を足せば第 1 式になっています）、第 1、2 式をとって z を諦めて x, y を z で表す事にすれば、 $x = 2z, y = z$ が得られますので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、長さ 1 の固有ベクトルは $\pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

以上から極値の候補点は 6 点：

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \left(\pm \frac{2}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

です（複号同順）。

条件式が表す曲面は球面であり、連続関数 $f(x, y, z)$ は球面上での最大値と最小値を必ずもち、かつ、それらは同時に極値でもありましたから、この最大値・最小値はさつき求めた極値の候補点の中になければなりません。

そこで 6 点での関数の値を見てみると

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1, \quad f\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2, \quad f\left(\pm \frac{2}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 4$$

ですから求める最大値は 2 点 $\left(\pm \frac{2}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ での 4 であり、最小値は 2 点 $\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ での -2 です。□

基本演習 4 変数 x, y, z が条件 $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$ を満たしながら動くときの関数 $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ の最大値と最小値を求めて下さい。また、対応する x, y, z の値も書いて下さい。

【解答例】 $q(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 1$ と置けば条件式は $q(x, y, z) = 0$ と書けます。

$\text{grad}q(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 6y \\ 12z \end{pmatrix}$ ですからこれが $\mathbf{0}$ となるのは原点に於いてのみですが、原

点は条件式 $q(x, y, z) = 0$ を満たしていませんから Lagrange の未定乗数法によって極値の候補点は $\text{grad}f(x, y, z) = r \text{grad}q(x, y, z)$ となる様な定数 r が存在する点のみである事が分かります。これを具体的に成分で書けば

$$\begin{cases} e^{x+y+z} = 4rx \\ e^{x+y+z} = 6ry \\ e^{x+y+z} = 12rz \end{cases}$$

ですから、 $r \neq 0$ に注意して $4x = 6y = 12z$ が分かります。従って $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ です

が、条件 $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$ を満たさねばならないので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

であることが分かります。

条件式が表す曲面は楕円面であり、連続関数 $f(x, y, z)$ は楕円面上での最大値と最小値を必ずもち、かつ、それらは同時に極値でもありましたから、この最大値・最小値は上の 2 点の中になければなりません。

そこで 2 点での関数の値を見てみると点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ で最大値 e 、点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ で最大値 e^{-1} であることが分かります。□

基本演習 5 条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ のもとで、 $F(x, y, z) = lx + my + nz$ (l, m, n は定数) の最大値、最小値を求めて下さい。

【解答例】 $w(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ と置けば条件式は $w(x, y, z) = 0$ と書く事が出来ます。

$\text{grad}w(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2}x \\ \frac{2}{b^2}y \\ \frac{2}{c^2}z \end{pmatrix}$ ですからこれが $\mathbf{0}$ となるのは原点のみですが、原点は条件

式 $w(x, y, z) = 0$ を満たしません。従って Lagrange の未定乗数法によって極値の候補点は $\text{grad}F(x, y, z) = h \text{grad}w(x, y, z)$ となる様な定数 h が存在する点のみである事が分かります。

これを具体的に成分で書けば

$$\begin{cases} l = \frac{2}{a^2}hx \\ m = \frac{2}{b^2}hy \\ n = \frac{2}{c^2}hz \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad 2h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2l \\ b^2m \\ c^2n \end{pmatrix}$$

が分かります。

$h = 0$ があり得るのは元々問題に於いて $l = m = n = 0$ だった場合のみで、この時は題意の関数 F は定数関数であり、最大値・最小値は自明です。

従って $(l, m, n) \neq (0, 0, 0)$ 、すなわち、 $h \neq 0$ の場合のみ考えれば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} a^2l \\ b^2m \\ c^2n \end{pmatrix}$$

であり、これを条件式に代入すれば

$$\frac{1}{4h^2} (a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2) = 1$$

$$\frac{1}{2h} = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}$$

ですから、極値の候補点は

$$\left(\pm \frac{a^2l}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}, \pm \frac{b^2m}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}, \pm \frac{c^2n}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}} \right)$$

の 2 点です。

条件式が表す曲面は楕円面であり、連続関数 $F(x, y, z)$ は楕円面上での最大値と最小値を必ずもち、かつ、それらは同時に極値でもありましたから、この最大値・最小値は上の 2 点の中になければなりません。

そこで 2 点での関数の値を見てみると

$$\text{最大値 : 点} \left(\frac{a^2l}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}, \frac{b^2m}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}, \frac{c^2n}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}} \right)$$

$$\text{値} \sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}$$

$$\text{最小値 : 点} \left(-\frac{a^2l}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}, -\frac{b^2m}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}, -\frac{c^2n}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}} \right)$$

$$\text{値} -\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}$$

であることが分かります。

□

基本演習 6 実変数 x, y, z が $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ を満たすとき $f(x, y, z) = xyz$ の最大値と最小値を求め、その時の x, y, z の値を示して下さい。

【解答例】 $G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$ と置けば条件式は $G(x, y, z) = 0$ と書く事が出来ます。 $G_x = 2x, G_y = 4y, G_z = 6z$ によれば $\text{grad}G = \mathbf{0}$ となる点は原点のみですが、原点は条件 $G = 0$ を満たしていません。従って Lagrange の定理により、極値の候補点は $\text{grad}F = p \text{grad}G$ となるような実数 p が存在するような点のみです。この式と条件式を連立させれば

$$\begin{cases} yz = 2px \\ zx = 4py \\ xy = 6pz \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \end{cases}$$

ですからこれを解きます。

第 1、2、3 式を辺々掛ければ $(xyz)^2 = 48p^3xyz$ となり、これは $xyz(xyz - 48p^3) = 0$ と因数分解されますから場合分けが生じます。

【 $x = 0$ の場合】この場合、第 1 式から y か z のいずれかも 0 ですが、第 3 式によれば $(0, 0, \pm\sqrt{2})$ 、 $(0, \pm\sqrt{3}, 0)$ が解となります。

【 $x \neq 0$ の場合】もしも $y = 0$ であれば第 2 式から $z = 0$ となり、第 4 式から $(\pm\sqrt{6}, 0, 0)$ が解です。また、 $y \neq 0$ であれば第 3 式から p, z 共に 0 ではありません、先に求めた式から $xyz = 48p^3$ が得られます。

すると第 1 式の両辺に x を掛ければ $48p^3 = 2px^2$ すなわち $24p^2 = x^2$ が得られます。同様に第 2、3 式から $12p^2 = y^2$ 、 $8p^2 = z^2$ が得られ、これらを第 4 式に代入すれば $24p^2 + 24p^2 + 24p^2 = 6$ すなわち $p^2 = \frac{1}{12}$ が分かります。

これを戻せば $x^2 = 2, y^2 = 1, z^2 = \frac{2}{3}$ が分かります。従って $(\pm\sqrt{2}, \pm 1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$ が得られますが、これらは全て (適当な p の下で) 連立方程式を満たしています。

以上から極値の候補点は

$$(0, 0, \pm\sqrt{2}), (0, \pm\sqrt{3}, 0), (\pm\sqrt{6}, 0, 0), \left(\pm\sqrt{2}, \pm 1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

です (複号同順でない)。

これらの点での関数 $f(x, y, z) = xyz$ の値を調べると、

$$f(0, 0, \pm\sqrt{2}) = f(0, \pm\sqrt{3}, 0) = f(\pm\sqrt{6}, 0, 0) = 0, \quad f\left(\pm\sqrt{2}, \pm 1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

です (符号は適宜解釈する)。

条件式の表す曲面は楕円面であり、楕円面上で連続関数 $f(x, y, z) = xyz$ は必ず最大値と最小値を達成し、しかもそれは同時に極値にもなっていますから、今求めた極値の候補の中に最小値と最大値がある筈です。値を比べれば、明らかに最大値は

$$\left(\sqrt{2}, 1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(\sqrt{2}, -1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(-\sqrt{2}, -1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

での $\frac{2}{\sqrt{3}}$ であり、最小値は

$$\left(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(-\sqrt{2}, 1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(\sqrt{2}, -1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(\sqrt{2}, 1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

での $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ です。

□

基本演習 7 $f(x, y) = x^2 + xy$ とします。 $x^2 + y^2 = 4$ を満たす (x, y) での $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めて下さい。

【解答例】 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ とします。 $g_x = 2x, g_y = 2y$ より、 $\text{grad}g = \mathbf{0}$ となるのは原点のみですが原点は条件を満たしていません。従って Lagrange の定理から極値の候補点は $\text{grad}f = p\text{grad}g$ となる実数 p が存在する点のみです。この式と条件式を連立させれば

$$\begin{cases} 2x + y = 2px \\ x = 2py \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

ですからこれを解きます。第 2 式を第 1 式に代入すれば

$$4py + y = 4p^2y \quad \text{すなわち} \quad y(4p^2 - 4p - 1) = 0$$

ですが、 $y = 0$ のとき第 2 式から $x = 0$ であり第 3 式と矛盾します。 $y \neq 0$ のときは

$$0 = 4p^2 - 4p - 1 = (2p - 1)^2 - 2$$

から $p = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ が分かり、第 2 式から $x = (1 \pm \sqrt{2})y$ なのでこれを第 3 式に代入して

$$(4 \pm 2\sqrt{2})y^2 = 4 \quad \text{すなわち} \quad y^2 = \frac{2}{2 \pm \sqrt{2}} = 2 \mp \sqrt{2}$$

より $y = \pm\sqrt{2 \mp \sqrt{2}}$ が得られます。従って 4 点の解が見つかりました (複号同順) :

$$\left(\pm(1 + \sqrt{2})\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right), \left(\pm(1 - \sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right).$$

条件式の表す曲線は円周であり、円周上で連続関数は最大値と最小値をとり、しかもそれは同時に極値でもありますから、最大値と最小値はこの候補点の中にある筈です。

そこで各点での $f(x, y)$ の値を調べてみると

$$f\left(\pm(1 + \sqrt{2})\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right) = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$f\left(\pm(1 - \sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) = 2 - 2\sqrt{2}$$

となっていますから、前者が最大値、後者が最小値である事が分かりました。

□

基本演習 8 $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, $x, y \geq 0$ の条件の下で関数 $f(x, y) = xy$ の最大値と最小値を求めて下さい。

【解答例】 $\text{grad}g = 0$ となるのは原点のみですが、原点は条件を満たしていません。従って Lagrange の定理により、この条件の下での極値の候補点は $\text{grad}f = w\text{grad}g$ となる実数 w が存在するような点のみである事が分かります。この式と条件式を具体的に書けば

$$\begin{cases} y = 2wx \\ x = 4wy \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

ですから、まず第 2 式を第 1 式に代入して

$$y = 8w^2y, \quad \text{すなわち} \quad y(8w^2 - 1) = 0$$

が得られますが、 $y = 0$ のとき第 2 式から $x = 0$ となりこれは第 3 式と矛盾するので $y \neq 0$ であって $w = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ が分かります。いずれの場合も第 1、2 式は同じ式 $x = \pm\sqrt{2}y$ となり、これを第 3 式に代入すれば

$$4y^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{2}$$

が得られます。従って求める候補点は 1 点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ です ($x, y \geq 0$ に注意)。

条件 $g = 0, x, y \geq 0$ の表す曲線は楕円周の一部であり、有界閉集合です。有界閉集合上の連続関数は必ず最大値と最小値をとりますが、それはこの曲線の端点で達成されるか、端点以外で達成されるかのどちらかです。そこで各点での関数値を調べます：

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}, \quad f(1, 0) = 0, \quad f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

この様に、端点での値は少なくとも最大値でない事が分かりますから、最大値は端点以外で達成され、それは同時に極大値ですから今求めた候補点の中にある筈です。しかしそれは値を見れば明らかで、最大値は $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ での $\sqrt{2}$ です。また、最小値が端点以外にあったとするとそれは極小値にもなっている筈ですが、生憎そのような点はない事が既に分かっています。従って最小値は端点で達成され、最小値は 2 点 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1, 0)$ での 0 です。□

基本演習 9 関数 $f(x, y) = x^{0.6}y^{0.4}$ の値を、条件 $x + y = 4$, $x \geq 0, y \geq 0$ のもとで最大化する x と y の値を求めて下さい。

【解答例 その 1 グローバルな 1 変数化】 条件式から $y = 4 - x$ ですからこれを使って関数を 1 変数化します：

$$F(x) = f(x, 4 - x) = x^{0.6}(4 - x)^{0.4}.$$

$\log t$ は単調増加関数ですから、 $H(x) = \log F(x) = 0.6 \log x + 0.4 \log(4 - x)$ を $0 < x < 4$ で考えたときの極値は元の関数 $f(x, y)$ の極値にもなっています。微分計算をすると

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{0.6}{x} - \frac{0.4}{4 - x} = \frac{0.4(4 - x) - 0.6x}{x(4 - x)} = \frac{1.6 - x}{x(4 - x)} \\ H''(x) &= -\frac{0.6}{x^2} - \frac{0.4}{(4 - x)^2} < 0 \end{aligned}$$

ですから、 $H'(x) = 0$ となるのは $x = 1.6$ のときであり、ここで $H(x)$ は極大値である事が分かります。また、 $0 < x < 1.6$ で $H'(x) > 0$ 、 $1.6 < x < 4$ で $H'(x) < 0$ ですからこの極大値は $H(x)$ の $(0, 4)$ での最大値でもあります。

更に $f(0, 4) = f(4, 0) = 0$ である事を考え合わせれば、結局 $(x, y) = (1.6, 2.4)$ のとき $f(x, y)$ は最大値 $1.6^{0.6}2.4^{0.4}$ である事が分かります。□

【解答例 その 2 有界閉集合上の連続関数の性質を使う方法】 $g(x, y) = x + y - 4$ と置けば条件式は $g(x, y) = 0$ となります。

$\text{grad}g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ なので $a, b > 0$ として点 (a, b) で $f(x, y)$ は条件 $g(x, y) = 0$ の下での極値であると仮定すると Lagrange の乗数法から

$$\text{grad}f(a, b) = w\text{grad}g(a, b)$$

となる様な実数 w が存在します。そこでこの方程式と条件式を合わせて連立すれば

$$0.6a^{-0.4}b^{0.4} = w, \quad 0.4a^{0.6}b^{-0.6} = w, \quad a + b = 4$$

が得られます。第 1 式と第 2 式を辺々割れば

$$\frac{3}{2} \frac{b}{a} = 1, \quad \text{すなわち、} \quad b = \frac{2}{3}a$$

が得られますのでこれを第 3 式に代入して $a = \frac{12}{5}$, $b = \frac{8}{5}$ が分かります。

条件式の表す曲線は 2 点 $(0, 4)$, $(4, 0)$ を結ぶ線分であり、これは有界閉集合なので問題の関数 $f(x, y)$ はこの線分上で必ず最大値をとります。

その最大値は条件式の表す曲線の端点 $(0, 4)$, $(4, 0)$ および $(\frac{12}{5}, \frac{8}{5})$ のいずれかで達成されますからこの 3 点での関数値を比較すると

$$f(0, 4) = 0, \quad f(4, 0) = 0, \quad f\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{12^{0.6}8^{0.4}}{5^{0.6}5^{0.4}} > 0$$

ですから最大値は点 $(\frac{12}{5}, \frac{8}{5})$ で達成される事が分かります。

□

基本演習 10 x - y 平面上の半楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \quad (x \geq 0) \cdots (i)$$

と x, y の関数 $z(x, y) = 2 + xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ を考えます。ただし、半楕円上の点 (x, y) に対し、原点と点 $(\frac{x}{2}, y)$ を結ぶ線分が x -軸となす角 θ とします。次の問に答えて下さい

(1) θ を媒介変数とする半楕円 (i) の媒介変数方程式を求めてください。 θ のとる範囲も明示するようにして下さい。

(2) 条件 (i) のもとでの関数 $z(x, y)$ の極値を求めるために、関数 $z(x, y)$ を θ のみの関数として表して下さい。

(3) 前問で得られた θ の関数 $f(\theta)$ が極値をとる $\cos \theta, \sin \theta$ の値を求めて下さい。

(4) $f(\theta)$ の極値を求めて下さい

(5) $f(0), f(\pm \frac{\pi}{4}), f(\pm \frac{\pi}{2})$ を求めて下さい。

(6) $f(\theta)$ のおよそのグラフを描いて下さい。

(7) 媒介変数 θ を用いずに、条件 (i) のもとでの関数 $z(x, y)$ の極値を、ラグランジュの乗数法で求めたいと思います。極値をとる (x, y) の値を求めるための条件式を書いて下さい。

(8) 極値をとる (x, y) の値を求めてください。

【解答例】 (1) $\frac{x}{2} = \cos \theta, y = \sin \theta$ ですから、媒介変数方程式は次の通り：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(\theta) &= z(2 \cos \theta, \sin \theta) = 2 + 2 \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{2}(4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{5}{2} + 2 \cos \theta \sin \theta + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3), (4) \quad f'(\theta) &= -2 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta \sin \theta \\ &= -2 + 4 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta \sin \theta \\ &= 2 \cos 2\theta - \frac{3}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

極値の候補点は $f'(\theta) = 0$ となる点であり、その点では

$$2 \cos 2\theta = \frac{3}{2} \sin 2\theta, \quad \text{すなわち} \quad \frac{4}{3} = \tan 2\theta$$

が成り立っています。このとき

$$\sin 2\theta = \pm \frac{4}{5}, \quad \cos 2\theta = \pm \frac{3}{5} \quad (\text{複号同順})$$

ですから、 $\cos 2\theta = \frac{3}{5}, \sin 2\theta = \frac{4}{5}$ のときは $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ であって

$$2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{3}{5}, \quad \text{従って} \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となっていますし、 $\cos 2\theta = -\frac{3}{5}, \sin 2\theta = -\frac{4}{5}$ のときは $-\pi < 2\theta < -\frac{\pi}{2}$ であって

$$2 \cos^2 \theta - 1 = -\frac{3}{5}, \quad \text{従って} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

となっている事が分かります。

また 2 階微分は、 $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ である点では

$$f''(\theta) = -4 \sin 2\theta - 3 \cos 2\theta = -4 \frac{4}{5} - 3 \frac{3}{5} < 0$$

より極大値である事が分かります。一方 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ である点では

$$f''(\theta) = -4 \sin 2\theta - 3 \cos 2\theta = 4 \frac{4}{5} + 3 \frac{3}{5} > 0$$

ですからこれは極小値である事が分かります。

また、 $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ となる点で

$$f(\theta) = \frac{5}{2} + 2 \frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{9}{2}$$

であり、また、 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ となる点で

$$f(\theta) = \frac{5}{2} - 2\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = 2$$

ですから、 $f(\theta)$ の極値は、 $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ となる点での極大値 $\frac{9}{2}$ と、 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ となる点での極小値 2 のみです。

(5)

$$f(0) = 4, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{17}{4}, \quad f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{4}, \quad f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

(6) 上の値と極値を使って描いてみて下さい (略)。

(7) $g(x, y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 - 1$ と置けば、条件式は $g = 0$ であり、この条件を満たす点の中には $\text{grad} g = \mathbf{0}$ となる点はありません。

従って Lagrange の定理から、極値の候補点は連立方程式：

$$\begin{cases} y + x = p\frac{x}{2} \\ x + y = 2py \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

の解 (のうちの x, y) です。従ってこの連立方程式を満たす実数 p が存在するような x, y であることが条件です。

(8) $p = 0$ のとき、第 1、2 式から $y = -x$ であり、これを第 3 式に代入して

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2 = \frac{4}{5}$$

がわかり、 $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ($x \geq 0$ による)、 $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ も分かります。

$p \neq 0$ のときは、第 1 式から第 2 式を引いて $\frac{x}{2} - 2y = 0$ であり、 $x = 4y$ が得られます。これを第 3 式に代入すれば

$$\left(\frac{4y}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad y^2 = \frac{1}{5}$$

となって $0 \leq x = 4y$ から $y = \frac{1}{\sqrt{5}}, x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ が得られます。

条件式の表す曲線は半楕円であり、これは有界閉集合です。有界閉集合上で連続関数 $z(x, y)$ は最大値と最小値をとりますが、それは半楕円の端点であるか、そうでなければ端点以外の点であって極値になっている筈です。

そこで今求めた 2 つの候補点と端点での関数の値を調べてみると

$$\begin{aligned} z\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) &= 2 - \frac{4}{5} + \frac{18}{5} = 2 \\ z\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) &= 2 + \frac{4}{5} + \frac{117}{5} = \frac{9}{2} \\ z(0, \pm 1) &= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となっていますから、端点では最大値でも最小値でもない事が分かります。従って存在する最大値・最小値は半楕円の端点以外の部分にあり、従ってそれらは極値になっています。極値であるが故にそれらはさっき求めた候補点の中にあり、今調べた値から最大値が $\frac{9}{2}$ 、最小値が 2 である事が分かります。

以上から、極値をとる点は $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (極大値 $\frac{9}{2}$)、 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ (極小値 2) です。□

発展演習 11 実変数 x, y の関数 $f(x, y) = x^3 - y^2$ について以下の問に答えて下さい。

(1) (x, y) が実平面全体をうごくとき、 $f(x, y)$ の臨界点 ($f_x = f_y = 0$ となる点) をすべて求めて下さい。

(2) 点 (x, y) が円 $x^2 + y^2 = 1$ の上をうごくとき、関数 $f(x, y)$ の最大、最小とそのときの x, y の値を求めて下さい。

【解答例】 (1) $f_x = 3x^2, f_y = -2y$ ですから $f_x = f_y = 0$ となるのは原点のみです。

(2) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ と置くと条件式は $g = 0$ と書けます。 $\text{grad} g = \mathbf{0}$ となる点は $g = 0$ を満たす範囲ではありませんから、Lagrange の定理から、極値の候補点は $\text{grad} f = w \text{grad} g$ となるような実数 w が存在する点しかありません。この式と条件式を連立させれば

$$\begin{cases} 3x^2 = 2wx \\ -2y = 2wy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

ですからこれを解きます。

まず $y = 0$ のときは $x = \pm 1$ であり、それぞれに対して第 1 式を満たす w が存在します (第 2 式は自明)。 $y \neq 0$ のときは第 2 式から $w = -1$ であって、第 1 式は

$$0 = 3x^2 - 2wx = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$$

と変形され、 $x = 0, -\frac{2}{3}$ が分かります。

$x = 0$ のときは第 3 式から $y = \pm 1$ であり、 $x = -\frac{2}{3}$ のときは $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ です。

以上から極値の候補点は $(\pm 1, 0), (0, \pm 1), \left(-\frac{2}{3}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ の 6 点です。

条件式の表す曲線は円周であり、円周上で連続関数は最大値と最小値をとり、かつそれらは極値にもなっています。極値であると言う事はこれらの最大値・最小値はさっき求めた候補点の中にあると言う事になります。そこで各点での関数の値を調べると、

$$f(\pm 1, 0) = \pm 1, \quad f(0, \pm 1) = -1, \quad f\left(-\frac{2}{3}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{23}{27}$$

ですから、求める最大値は $f(1, 0) = 1$ 、最小値は $f(-1, 0) = f(0, \pm 1) = -1$ です。□

発展演習 12 $x^2 + y^2 = 1$ の条件のもとで、関数 $f(x, y) = x^3 + y^3$ の極値を（ラグランジュの乗数法を用いて）求めて下さい。

この問題は一見何の問題も無く Lagrange の乗数法と閉曲線（円周）上の連続関数の性質で片が付くように思われますが、実際にやってみると極値の候補が思いのほか沢山あり、最大値・最小値に相当する点は良くてもそれ以外の候補点について別の判断をしなければならず案外難しいですね。

【Lagrange の乗数法による候補点リスト】

ここは今回の話のメインではないので省略します。普通に計算すれば特異点はなく、6 点の候補点が得られるでしょう：

$$(0, \pm 1), (\pm 1, 0), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ (複号同順).}$$

【円周上の連続関数の性質による選別】

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とします。条件式 $g(x, y) = 0$ の表す曲線は円周です。連続関数 $f(x, y)$ は円周上で最大値と最小値をもち、それらは同時に極値ですから、さっき求めた極値の候補の中に最大値と最小値が入っている事になります。そこで各点での関数値を計算すると

$$f(0, \pm 1) = f(\pm 1, 0) = \pm 1, \quad f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ですから、点 $(1, 0), (0, 1)$ で最大値かつ極大値 1、点 $(-1, 0), (0, -1)$ で最小値かつ極小値 -1 をとる事が分かります。

【残りの候補点の吟味】

しかし残念ながらまだ候補点が 2 点残っており、これらが極値かどうかはまだ判定されていません。この場合も条件式の表す曲線が閉曲線でなかった場合と同様に、陰関数定理を使って（ローカルに）1 変数化して計算する方法でやってみましょう。

問題の 2 点 $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ では、 $g_y \neq 0$ となっていますからこの 2 点の近くで y を x の関数で表すことが出来、それを $y = y(x)$ と書く事にします。この点の付近で $g(x, y(x)) = 0$ が成り立つのでこの $y(x)$ の微分は

$$x^2 + y(x)^2 - 1 = 0 \\ 2x + 2yy' = 0 \quad \text{すなわち、} \quad y' = -\frac{x}{y}$$

です。そこでローカルに $\phi(x) = f(x, y(x)) = x^3 + y(x)^3$ と置いて 1 変数化すれば

$$\phi' = 3x^2 + 3y^2y' = 3x^2 - 3yx, \quad \phi'' = 6x - 3y'x - 3y = 6x + 3\frac{x^2 - y^2}{y}$$

であり、問題の 2 点では $(x = y \text{ であることに注意すると分かり易いです})$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ では } \phi'' > 0, \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ では } \phi'' < 0$$

となっていますから、前者は極小値、後者は極大値です。

【結論】

以上から求める極値は以下の通り：

$$\text{極大値：}(1, 0), (0, 1) \text{ での } 1, \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ での } -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{極小値：}(-1, 0), (0, -1) \text{ での } -1, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ での } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

□

発展演習 13 関数 $f(x, y) = 3x^2y$ について、条件 $2x^4 + y^4 = 48$ の下での $f(x, y)$ の極値を求めよ。

$g(x, y) = 2x^4 + y^4 - 48$ と置きます。

$$\text{grad} f = \begin{pmatrix} 6xy \\ 3x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{grad} g = \begin{pmatrix} 8x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix}$$

です。条件を満たす点の中に $\text{grad} g = \mathbf{0}$ となる点 (原点です) がいないことから、Lagrange の乗数法定理によりこの条件下で極値と成り得る点は、

$$\begin{cases} 6xy = 8kx^3 \\ 3x^2 = 4ky^3 \\ 2x^4 + y^4 = 48 \end{cases}$$

の実数解 (x, y, k) のうちの (x, y) です。

第 1 式の形から $x = 0$ かどうかで場合分けをします。

$x = 0$ の時、第 3 式から $y = \pm 2\sqrt[4]{3}$ であり、第 2 式から $k = 0$ が分かります。

$x \neq 0$ の時は、第 1 式が $3y = 4kx^2$ になり、ここに第 2 式を代入して x を消去すれば $y(16k^2y^2 - 9) = 0$ が得られますが、第 2 式によれば $y = 0$ だと $x = 0$ となってしまうので (矛盾)、 $y \neq 0$ であって、 $16k^2y^2 = 9$ が得られます。

更に第 2 式と第 3 式から x を消去すれば $\frac{2}{9}16k^2y^2y^4 + y^4 = 48$ ですから、ここに $16k^2y^2 = 9$ を代入して $y^4 = 16$ 、すなわち、 $y = \pm 2$ を得ます。これを再度第 3 式に代入すれば $x^4 = 16$ 、すなわち、 $x = \pm 2$ が得られます。この 4 点 $(\pm 2, \pm 2)$ のいずれに対しても連立方程式を満たす実数 k は存在します。

以上から、極値の候補点は

$$(0, \pm 2\sqrt[4]{3}), \quad (\pm 2, \pm 2)$$

の 6 点であり、この 6 点での f の値は

$$f(0, \pm 2\sqrt[4]{3}) = 0, \quad f(\pm 2, 2) = 24, \quad f(\pm 2, -2) = -24$$

となっています。

条件式の表す曲線は閉曲線なので、閉曲線上での連続関数の性質により、 f は件の条件下での最大値と最小値をもち、それらは同時に極値にもなっています。すると極値であるが故にそれらの最大値・最小値は先程求めた極値の候補の中にある事になり、明らかに $f(\pm 2, 2) = 24$ が最大 (かつ極大)、 $f(\pm 2, -2) = -24$ が最小 (かつ極小) です。

また、曲線 $g = 0$ 上の点 $(0, 2\sqrt[4]{3})$ のごく近くでは y 座標は正ですから、 f の値は正になっています。従って $f(0, 2\sqrt[4]{3}) = 0$ は極小値です。同様に考えれば $f(0, -2\sqrt[4]{3}) = 0$ は極大値です。□