4　条件付きの極値問題　その４　問題演習

4.1　まとめ

条件付き極値問題　候補点の選定

定理 4.1 [Lagrange の未定乗数法] 条件 $G(x_1,\ldots,x_n)=0$ のもとで $F(x_1,\ldots,x_n)$ が極値をとる可能性があるのは次の２種類の点のみです：
（i）$G=0$ となる点で $\mathrm{grad}G=o$ であるもの（特異点）
（ii）$G=0$ となる点で $\mathrm{grad}F=p\,\mathrm{grad}G$ となる様な実数 p が存在するもの

条件付き極値問題　極値判定

定理 4.2 [閉曲線上での連続関数の性質] $G(x,y)=0$ の表す曲線が閉曲線である時、条件 $G(x,y)=0$ のもとでの連続関数 $F(x,y)$ の最大値・最小値は必ず存在し、同時にそれらは極大値・極小値でもあります。

事実 4.3 [閉曲面での連続関数の性質　３次元の場合] 楕円面（本当は“閉曲面”で良い）上で定義された連続関数は最大値と最小値を必ずもち、それらは同時に極値でもあります。

事実 4.4 [有界閉集合上の連続関数の性質] 有界閉集合上で定義された連続関数は最大値・最小値を必ずもちます。

＊『有界』とは、ある半径の（n 次元）球内にすっぽり入ってしまうことであり、『閉集合』とは、閉区間のように、その境界を含む集合のこと。

ローカルな１変数化　陰関数定理

事実 4.5 [陰関数定理] $G(x,y)$ は C^2-級であるとします。曲線 $G(x,y)=0$ 上の点 (a,b) において $G_y(a,b)\neq 0$ であるならば、（曲線上の）この点の近くでは y は x の２階微分可能な関数として表すことが出来ます。

曲線 $G(x,y)=0$ 上の点 (a,b) において $G_x(a,b)\neq 0$ であるならば、（曲線上の）この点の近くでは x は y の２階微分可能な関数として表すことが出来ます。

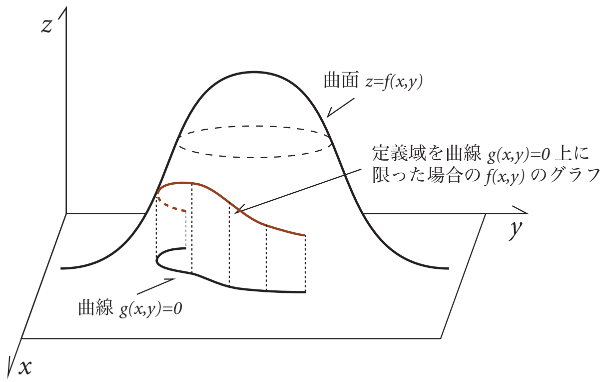
＊ C^2-級とは、２階偏微分可能であって、各偏導関数が連続なこと。
C^2-級であれば、連続関数であり、全微分可能であり、合成関数の微分規則が使え、高次の偏微分が順序によりません。

１変数関数の極値問題

事実 4.6 [１階微分による候補点の選定]
前提条件：　関数 $V(x)$ は微分可能。
主張内容：　$V(x)$ の極値の候補点は $V'(x)=0$ となる点のみ。

事実 4.7 [２階微分による判定]
前提条件：
(i)　$V'(a)=0$。
(ii)　関数 $V(x)$ は点 a の近くで２階微分可能、各導関数は連続。
主張内容：
(i)　$V''(a)>0$ ならば V は点 a で極小値であり、
(ii)　$V''(a)<0$ ならば V は点 a で極大値です。
(iii)　$V''(a)=0$ の場合は不明です。

4.2　登山と地形図



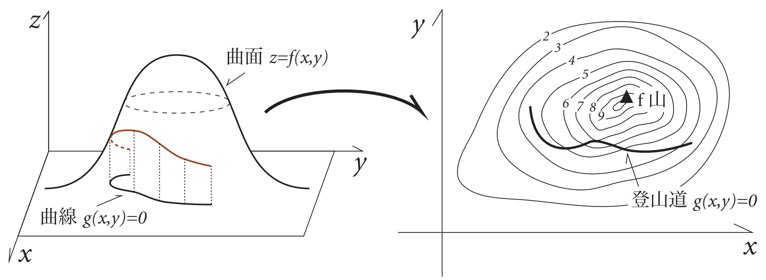
関数 $z = f(x, y)$ のグラフを山だと思いましょう。

で、その山の中腹に曲線がへばりついていますが、これは“山の表面”にある曲線ですから、まあ、登山道だと考えてみましょう。

この登山道上の点の z-座標、すなわち“標高”が関数 f の値になっているわけですから、条件 $g(x, y) = 0$ の下での関数 $f(x, y)$ の極値を求める問題は、道中での標高の極値を求めなさいと云う風に読み替える事が出来、大雑把に言えば『この登山道に沿って f 山を登山する時に、標高の最高点はどこですか？』と云う風な問題だと捉える事が出来ます。

そうですか、登山ですか。じゃあ、登山に必要な装備を整えなくてはなりませんね。登山に必要なものと云えば、リュックに水筒、あとおやつ 300 円以内ですか？え、違う？

いやいや、登山の時に大切なものは何と言っても地形図です。



実際の山の斜面上にある登山道を地図上で見ると、その xy-平面への射影である曲線 $g(x, y) = 0$ で表現されることに注意しましょう。

4.3　等高線と登山道の関係

地形図内にある同心円風の曲線群は所謂等高線と云うもので、これは同じ高さの点を結んで得られる曲線です。

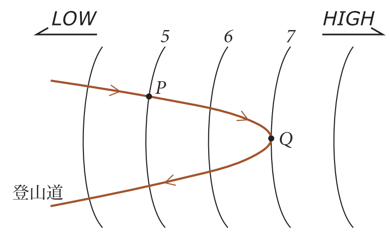
今回の f 山（すなわち、$z = f(x, y)$ のグラフ）の場合、(x, y) での（これは東経・北緯に相当しますね）標高は $f(x, y)$ で与えられているわけですから、例えば高さが 3 の等高線は方程式：$f(x, y) = 3$、つまり $f(x, y) - 3 = 0$ です。

また、点 (a, b) における標高は $f(a, b)$ ですから、この点を通る等高線は方程式：

$$f(x, y) - f(a, b) = 0$$

の表す曲線となります。

さっきの地形図をもっと大雑把に書けば下図の様になっています：



ここで 2 つの点 P, Q に注目して下さい。

2 点の違いは何かと云うと、点 P では登山道は等高線と“普通に”交わっていますが、点 Q では登山道と等高線が接しています。この違いは何を意味するのでしょうか。

まず点 P ですが、図中の矢印の様に登ったとすると、点 P に近づくにつれて標高はだんだんと高くなって行き、点 P で標高は 5 になりますが、その後もまた登り続けて標高 6 の方へ進んでいます。つまりこの点 P は単なる“坂の途中”であって、標高が極大あるいは極小になったりはしていません。

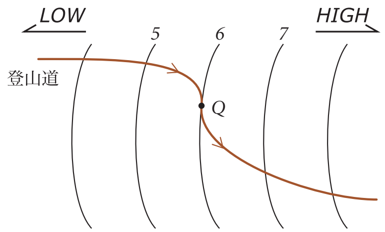
この様に登山道と等高線が交差する点では、標高は極値にはなりません。

一方点 Q に近づくにつれて標高はだんだんと高くなって行き、点 Q で標高は 7 になりますが、その後は等高線で言って 6 と 7 の間を進んでいますから、点 Q から今度は下っていることが分かる筈です。このとき、標高は点 Q で極大となっています。

この様に、登山道上で標高が極大／極小となる点では必ず登山道と等高線が接していなければなりません。

極値　⇒　登山道と等高線が接している

しかしこの逆、『登山道と等高線が接している　⇒　極値』は残念ながら成り立ちません。なぜなら下図の様な登山道で登ることもあるからです：



この例では点 Q に向けて登って行って標高 6 に達しますが、その後更に高い方へと進んでいますからやはりこの点は単なる“登っている途中”に過ぎません。

4.4　数式による記述

２つの曲線 (登山道と等高線) が接すると云う事を数式で表すとどうなるでしょうか。

一般に曲線 $F(x,y) = 0$ 上の点 (a,b) に於ける曲線の接線の方向ヴェクターは $\begin{pmatrix} f_y(a,b) \\ -f_x(a,b) \end{pmatrix}$ であり、法線ヴェクターは $\mathrm{grad}F(a,b) = \begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$ で与えられます。

接すると云うことは共通の接線をもつと云う事ですから、当然接線の方向ヴェクターは平行であり、同時に法線ヴェクターも平行です。どちらで計算しても良いのですが、法線ヴェクターの方が記述がすっきりしますのでこちらで行きましょう。

まず登山道ですがこれは $g(x,y) = 0$ と表されていますので登山道上の点 (a,b) での法線ヴェクターは $\mathrm{grad}g(a,b)$ です。
一方、点 (a,b) での等高線は $f(x,y) - f(a,b) = 0$ でしたから、

$$\{f(x,y) - f(a,b)\}_x = f_x(x,y) - 0, \quad \{f(x,y) - f(a,b)\}_y = f_y(x,y) - 0$$

に注意すればこの等高線の点 (a,b) での法線ヴェクターは $\mathrm{grad}f(a,b)$ です。
これらが平行と云うことは、一方が他方の定数倍となると云うことですから

$f(x,y)$ は点 (a,b) で条件 $g(x,y) = 0$ のもとでの極値	$\Longrightarrow$	$\mathrm{grad}f(a,b) = p\,\mathrm{grad}g(a,b)$ となる様な実数 p が存在する

となっています。

課題　第 1 回

以下の問題を自分で考えて自筆にて解答してください。

課題 1.1 条件 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ の下での関数 $f(x,y,z) = xyz$ の最大値と最小値を求めて下さい。

課題 1.2 条件 $x^2 - 4x + 2y^2 - 4y + 3 = 0$ の下での関数 $f(x,y) = x + 2y$ の最大値と最小値を求めて下さい。

課題 1.3 条件 $y^2 - x^2 + 1 = 0$ の下での関数 $f(x,y) = x^3 + 2y$ の極値を求めて下さい。

Exercise

基本演習 1 $x^2+y^2=1$ のとき、関数 $f(x,y)=x^3+\frac{1}{2}y^2-2x$ の最大値と最小値を求めて下さい。

基本演習 2 条件 $x^2-4x+2y^2-4y+3=0$ のもとで、関数 $g(x,y)=x+2y$ の最大値と最小値を求めて下さい。

基本演習 3 $\mathbb{R}^3$ のデカルト座標を x,y,z とします。$x^2+y^2+z^2=1$ の拘束条件のもとで、関数 $f(x,y,z)=3x^2+2xy+2xz+4yz$ の最大値、最小値とそれらを与える (x,y,z) を求めて下さい。

基本演習 4 変数 x,y,z が条件 $2x^2+3y^2+6z^2=1$ を満たしながら動くときの関数 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{x+y+z}$ の最大値と最小値を求めて下さい。また、対応する x,y,z の値も書いて下さい。

基本演習 5 条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ のもとで、$F(x,y,z)=lx+my+nz$（l,m,n は定数）の最大値、最小値を求めて下さい。

基本演習 6 実変数 x,y,z が $x^2+2y^2+3z^2=6$ を満たすとき $f(x,y,z)=xyz$ の最大値と最小値を求め、その時の x,y,z の値を示して下さい。

基本演習 7 $f(x,y)=x^2+xy$ とします。$x^2+y^2=4$ を満たす (x,y) での $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めて下さい。

基本演習 8 $g(x,y)=x^2+2y^2-1=0,\ x,y\geq 0$ の条件の下で関数 $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めて下さい。

基本演習 9 関数 $f(x,y)=x^{0.6}y^{0.4}$ の値を、条件 $x+y=4,\ x\geq 0, y\geq 0$ のもとで最大化する x と y の値を求めて下さい。

基本演習 10 x-y 平面上の半楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1 \quad (x\geq 0)\cdots(i)$$

と x,y の関数 $z(x,y)=2+xy+\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ を考えます。ただし、半楕円上の点 (x,y) に対し、原点と点 $\left(\frac{x}{2},y\right)$ を結ぶ線分が x-軸となす角 θ とします。次の問に答えて下さい

(1) θ を媒介変数とする半楕円 (i) の媒介変数方程式を求めてください。θ のとる範囲も明示するようにして下さい。

(2) 条件 (i) のもとでの関数 $z(x,y)$ の極値を求めるために、関数 $z(x,y)$ を θ のみの関数として表して下さい。

(3) 前問で得られた θ の関数 $f(\theta)$ が極値をとる $\cos\theta,\sin\theta$ の値を求めて下さい。

(4) $f(\theta)$ の極値を求めて下さい

(5) $f(0), f\left(\pm\frac{\pi}{4}\right), f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$ を求めて下さい。

(6) $f(\theta)$ のおよそのグラフを描いて下さい。

(7) 媒介変数 θ を用いずに、条件 (i) のもとでの関数 $z(x,y)$ の極値を、ラグランジュの乗数法で求めたいと思います。極値をとる (x,y) の値を求めるための条件式を書いて下さい。

(8) 極値をとる (x,y) の値を求めてください。

発展演習 11 実変数 x,y の関数 $f(x,y)=x^3-y^2$ について以下の問に答えて下さい。

(1) (x,y) が実平面全体をうごくとき、$f(x,y)$ の臨界点（$f_x=f_y=0$ となる点）をすべて求めて下さい。

(2) 点 (x,y) が円 $x^2+y^2=1$ の上をうごくとき、関数 $f(x,y)$ の最大、最小とそのときの x,y の値を求めて下さい。

発展演習 12* $x^2+y^2=1$ の条件のもとで、関数 $f(x,y)=x^3+y^3$ の極値を（ラグランジュの乗数法を用いて）求めて下さい。

発展演習 13* 関数 $f(x,y)=3x^2y$ について、条件 $2x^4+y^4=48$ の下での $f(x,y)$ の極値を求めよ。