5　２変数関数の極値問題

5.1　復習：１変数関数の極値の求めかた

F が十分に微分可能であれば２階微分までの計算で極値を求める事が出来ます：

事実 5.1 十分に微分可能な関数 $F(t)$ が極値をとる可能性があるのは $F'(t)=0$ である点のみです。

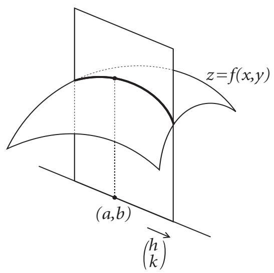
事実 5.2 $F(t)$ が十分微分可能であって $F'(a)=0$ であれば、
- (i)　$F''(a)>0$ ならば $F(t)$ は点 a で極小値
- (ii)　$F''(a)<0$ ならば $F(t)$ は点 a で極大値
- (iii)　$F''(a)=0$ の場合は（この方法では）不明

5.2　直線上での様子

（なめらかな）２変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で（狭義の）極値をとるかどうか調べるためには、この点 (a,b) の付近での関数 $f(x,y)$ の値の様子を調べる必要があります。

(a,b) の近くでの $f(x,y)$ の様子	点 (a,b) で極値であるか否か
常に $f(x,y)<f(a,b)$	極大値
常に $f(x,y)>f(a,b)$	極小値
$f(x,y)$ が $f(a,b)$ より大きい所も小さい所もある	極値ではない

２次元の広がりの中でこれをきちんと見るために、簡単のためにまずはこの点 (a,b) を通る直線を考えて、この直線上で $f(x,y)$ の値がどうなっているかを見てみましょう。レーダーがスキャンする様にこれを $360°$ やれば２次元全体を見ることが出来ます。



点 (a,b) を通りヴェクター $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ に平行な直線を考え：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

この直線上での f の値を $F(t)=f(a+th,b+tk)$ とします。

5.2.1　１階微分の調査

点 (a,b) は $t=0$ に対応するので $F'(0)$ を計算してみましょう。

$$F'(t) = f_x(a+th,b+tk)h + f_y(a+th,b+tk)k = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \mathrm{grad} f(a+th,b+tk)$$

$$F'(0) = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \mathrm{grad} f(a,b)$$

もしも $f(x,y)$ が (a,b) で極大値であるならば、どんな直線上に制限してもその直線上でも極大値になっていなければなりません。極小値についても同様です（しかし逆は成り立ちません。$360°$ どの直線上でも極大値になっていたとしても２変数の極大値とは限りません。どのような反例があるか想像出来ますか？）。

従って $f(x,y)$ が (a,b) で極値であるなら任意のヴェクター $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ に対して $F'(0)=0$ が成り立っているはずです。これは $\mathrm{grad} f(a,b)=\mathbb{o}$ を意味します。

事実 5.3 関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) において極値をとるなら $\mathrm{grad} f(a,b)=\mathbb{o}$ である。

これは２変数関数のグラフ $z=f(x,y)$ を、$g(x,y,z)=z-f(x,y)$ としたときの $g(x,y,z)=0$ が表す曲面と捉えた時に、そのグラディエントが ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である事を意味しており、接平面が『水平』ですから確かに極値である山の頂上か谷底のような所になっていることが窺えます。

5.2.2　２階微分の調査

$F'(x)=0$ であるような点については $F(t)$ の２階微分を計算してみれば極大なのか極小なのかが分かります。

$$\begin{aligned}
F'(t) &= f_x(a+th,b+tk)h + f_y(a+th,b+tk)k \\
F''(t) &= \{f_{xx}(a+th,b+tk)h + f_{xy}(a+th,b+tk)k\}\,h \\
&\quad + \{f_{yx}(a+th,b+tk)h + f_{yy}(a+th,b+tk)k\}\,k \\
&= f_{xx}(a+th,b+tk)h^2 + 2f_{xy}(a+th,b+tk)hk + f_{yy}(a+th,b+tk)k^2 \\
F''(0) &= f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2.
\end{aligned}$$

このままでは分かりづらいので、$k \neq 0$ として k^2 でくくってやれば

$$= k^2 \left\{ f_{xx}(a,b)\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2f_{xy}(a,b)\left(\frac{h}{k}\right) + f_{yy}(a,b) \right\}$$

であり、更に $\frac{h}{k} = P$ と置けば

$$= k^2 \left\{ f_{xx}(a,b)P^2 + 2f_{xy}(a,b)P + f_{yy}(a,b) \right\}$$

と書けますので、

$$Q(P) = f_{xx}(a,b)P^2 + 2f_{xy}(a,b)P + f_{yy}(a,b)$$

の符号について考えると、判別式 D を

$$D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$$

として考えた場合（通常の２次方程式の判別式とは符号が逆かも知れませんが）判別式が負の場合、すなわち

$$D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 < 0$$

の場合は $Q(P)$ のグラフは P 軸と２点で交わりますから $Q(P)$ の符号は P の値により正にも負にもなります。これは元々の関数 $f(x,y)$ を点 (a,b) を通る色々な直線上に制限して考えた時、どの方向の直線に制限するかによってその直線上で極大であったり極小であったり様々であることを意味しますから、そのような場合は元々の関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) では極値ではない事が分かります。

一方判別式が正の場合、すなわち

$$D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$$

の場合は $Q(P)$ のグラフは P 軸とは交わりませんから放物線は上半平面あるいは下半平面のどちらかに入っていることになります。上半平面に入っているなら当然任意の P に対して $Q(P) > 0$ ですし、下半平面なら $Q(P) < 0$ です。

このどちらであるかは放物線が上に凸か下に凸かで決まりますから２次の係数を見てやれば，$f_{xx}(a,b) > 0$ なら下に凸で任意の P に対して $Q(P) > 0$ 従って極小値、$f_{xx}(a,b) < 0$ なら上に凸で任意の P に対して $Q(P) < 0$ 従って極大値であることが分かります。

以上大雑把な説明でしたが、これをまとめると次のようになります。判別式にはヘシアンと云う名前が付けられています。$f(x,y)$ は十分になめらか（偏微分可能など）であるとします。

定義 5.4 ２変数関数 $f(x,y)$ に対して次で定まる関数 H_f：

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)f_{yx}(x,y)$$

を、関数 $f(x,y)$ のヘシアン（Hessian）と言う。

事実 5.5 $\mathrm{grad} f(a,b) = \mathbb{o}$ であるなら、$f(x,y)$ のヘシアンを $H_f(x,y)$ として

(i) $H_f(a,b) > 0$ のとき f は点 (a,b) で極値であり、
  (i -1) $f_{xx}(a,b) > 0$ ならばそれは極小値であり、
  (i -2) $f_{xx}(a,b) < 0$ ならばそれは極大値である。

(ii) $H_f(a,b) < 0$ のとき f は点 (a,b) で極値ではない。

(iii) $H_f(a,b) = 0$ のときは（この方法では）不明である。

例題 5.6 [教科書　例題 7.1] 次の関数の極値を求めて下さい。
(1) $f(x,y) = x^3 - 3axy + y^3 \quad (a > 0)$　(2) $f(x,y) = x^3 + y^2$

(1) まず必要となる各種偏導関数を求めておきます。

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3ay, \quad f_y(x,y) = -3ax + 3y^2$$
$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -3a, \quad f_{yy}(x,y) = 6y.$$

すると $\mathrm{grad} f(x,y) = \mathbb{o}$ となる点は連立方程式：

$$\begin{cases} 3x^2 - 3ay = 0 \\ 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$$

の解を求めれば良いのでこれを解きます。第１式から第２式を辺々引けば、

$$0 = 3(x^2 - y^2) + 3a(x - y) = (x - y)(x + y + a)$$

ですので、$x - y$ が 0 であるかどうかで分類して考えます。

$x - y = 0$ のとき：このとき連立方程式の２本の式は同一の式：$3x^2 - 3ax = 0$ なので結局 $x = 0, a$ である事が分かります（このときそれぞれ $y = 0, a$）。

$x - y \neq 0$ のとき：$x + y + a = 0$ から得られる $y = -x - a$ を第１式に代入すると

$$0 = 3x^2 - 3a(-x - a) = x^2 + ax + a^2$$

となりますが、この２次方程式は実数解を持ちません。

以上により $\mathrm{grad} f(x, y) = \mathbb{o}$ となる点は２点 $(0, 0), (a, a)$ である事が分かりました。

最後にヘシアンによる判定ですが、関数 f のヘシアン H を次のように定めます：

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{vmatrix}.$$

点 $(0, 0)$ について：

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -3a \\ -3a & 0 \end{vmatrix} = -9a^2 < 0$$

この様にヘシアンが負なのでこの点では極値ではありません。

点 (a, a) について：

$$H(a, a) = \begin{vmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{vmatrix} = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0$$

この様にヘシアンが正なので関数 f は極値であり、また、$f_{xx}(a, a) = 6a > 0$ によればそれは極小値である事が分かります。関数の値も求めておくと $f(a, a) = -a^3$ です。

以上により関数 f の極値は点 (a, a) での極小値 $-a^3$ のみである事が分かりました。

(2) 各種偏導関数を求めると

$$f_x(x, y) = 3x^2, \quad f_y(x, y) = 2y$$
$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 2$$

なので $\mathrm{grad} f(x, y) = \mathbb{o}$ となる点が原点のみである事は明らかです。

次にヘシアンによる判定ですが、関数 f のヘシアン H を

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

とすると

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

なので極値かどうかはヘシアンによる調査では判定出来ません。

そこで原点付近の様子を詳しく見てみましょう。例えば原点を通る直線 $y = 0$ の上のみに注目すると、この直線上では $f(x, y) = x^3$ であって、原点では 0 ですが、そのどんな近くにも値が正になる点も負になる点も両方存在しています。と云う事は原点で極大値あるいは極小値と云う事はあり得ません。

以上により関数 f は極値をもたない事が分かりました。 □

基本演習 **1 [** 教科書問題 **7.1]** 次の関数の極値を求めて下さい。

(1) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y$

(2) $f(x, y) = x^2 + 4xy - 8y^2$

(3) $f(x, y) = x^3 - 5x^2 + 8x + y^2 + 2y$

課題　第２回

以下の問題を自分で考えて自筆にて解答してください。

課題 **2.1** $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - xy^2 - yx^2 - xy$ の極値を求めてください。

課題 **2.2** 関数 $f(x, y) = \dfrac{x + y^2 - y}{1 + x^2}$ の極値をとる点（候補ではなく、実際に極値をとる点です）を求めて下さい。

Exercise

＋　以下の問題は与えられた関数の極値を求める問題です　＋

【３次関数の問題】

基本演習 **2** $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

基本演習 **3** $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy$

基本演習 **4** $f(x,y) = 4x^3 - y^3 + 3x^2y + 9y$

基本演習 **5** $f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 6xy - 3$

基本演習 **6** $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$

基本演習 **7** $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 6x + 1$

基本演習 **8** $f(x,y) = x^3 - 12xy + 6y^2$

基本演習 **9** $f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 6xy$

基本演習 **10** $f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$

基本演習 **11** $f(x,y) = x^3 - 3x^2 - y^2$

基本演習 **12** $f(x,y) = x^2 - 6x + 2xy^2 + 2y^2$

基本演習 **13** $f(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + xy - 3y - \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x$

基本演習 **14** $f(x,y) = x(1 - x^2 - y^2)$

基本演習 **15** $f(x,y) = xy(3 - x - y)$

基本演習 **16** $f(x,y) = xy(x + 2y - 6)$

【２次関数の問題】

基本演習 **17** $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 6x + 4y + 2xy + 14$

基本演習 **18** $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y$

基本演習 **19** $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y$

基本演習 **20** $f(x,y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$

基本演習 **21** $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1$

基本演習 **22** $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$

基本演習 **23** $f(x,y) = x^2 + 2\alpha xy + y^2$（ただし $\alpha^2 \neq 1$）

【４次関数その他】

基本演習 **24** $f(x,y) = x^2 - 4x + y^4 - 8y^2$

基本演習 **25** $f(x,y) = x^4 - 2xy - x^2 + y^2$

基本演習 **26** $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$

基本演習 **27** $f(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$

基本演習 **28** $f(x,y) = x^4(x-2)^2 + y^2$

基本演習 **29** $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

基本演習 **30** $f(x,y) = \mathrm{e}^x(x^2 + y^2)$

【少し難しいもの】

発展演習 **31** $f(x,y) = x^3 + 2x^2y - xy^2 - 4xy$

発展演習 **32** $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 3x$

発展演習 **33** $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 - 2xy + 3y^2 + 1$

発展演習 **34** $f(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 - 3x^2$

発展演習 **35** $f(x,y) = x^2y + xy^2 + y^3 - y$

発展演習 **36** $f(x,y) = 2x^2 - 6x^2y + 2y^3$

発展演習 **37** $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$

発展演習 **38** $f(x,y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 6y^2$

発展演習 **39** $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

発展演習 **40** $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

発展演習 **41** $f(x,y) = x^{\log y}\,(x > 0, y > 0)$

発展演習 **42** $f(x,y) = x^2 - x\sin y - \cos^2 y$

Exercise　解答例

基本演習 **1 [** 教科書　問題 **7.1]** 次の関数の極値を求めて下さい。
(1) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y$

【解答例】　まず必要となる各種偏導関数を求めておきます。

$$f_x(x,y) = 2x + 2y - 2, \quad f_y(x,y) = 2x + 4y - 2$$
$$f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2, \quad f_{yy}(x,y) = 4.$$

次に $\mathrm{grad} f(x,y) = \mathbb{o}$ となる点を求めるわけですが、その様な点は連立方程式：

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2 = 0 \\ 2x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

の解を求めれば良い事になります。
第１式から第２式を引けば明らかに $y = 0$ である事が分かりますので、これを戻せば $2x - 2 = 0$ すなわち $x = 1$ が得られます。

以上により $\mathrm{grad} f(x,y) = \mathbb{o}$ となる点は１点 $(1,0)$ のみである事が分かりました。

次にこの点に於いてヘシアンを計算して極値かどうかの判定をしましょう。
関数 f のヘシアンを H_f：

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

とすると

$$H_f(1,0) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

ですので点 $(1,0)$ に於いて関数 f は極値であり、また、$f_{xx}(1,0) = 2 > 0$ によればそれは極小値である事が分かります。関数の値も求めておくと $f(1,0) = -1$ です。

以上により関数 f の極値は点 $(1,0)$ での極小値 -1 のみである事が分かりました。　□

(2) $f(x,y) = x^2 + 4xy - 8y^2$

【解答例】　まず必要となる各種偏導関数を求めておきます。

$$f_x(x,y) = 2x + 4y, \quad f_y(x,y) = 4x - 16y$$
$$f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4, \quad f_{yy}(x,y) = -16.$$

次に $\mathrm{grad} f(x,y) = \mathbb{o}$ となる点を求めるわけですが、その様な点は連立方程式：

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 4x - 16y = 0 \end{cases}$$

の解を求めれば良い事になりますが、第１式を両辺２倍してから第２式と辺々引けば直ちに $y = 0$ が分かりますので、結局 x も 0 になってしまいます。つまり $\mathrm{grad} f(x,y) = \mathbb{o}$ となる点は原点 $(0,0)$ のみである事が分かりました。

次に原点に於いてヘシアンを計算して極値かどうかの判定をしましょう。
関数 f のヘシアンを H_f：

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -16 \end{vmatrix}$$

とすると

$$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -16 \end{vmatrix} = -48 < 0.$$

となってヘシアンが負なので原点では極値ではありません。以上により関数 f は極値をもたない事が分かりました。　□

(3) $f(x,y) = x^3 - 5x^2 + 8x + y^2 + 2y$

【解答例】　まず必要となる各種偏導関数を求めておきます。

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 10x + 8, \quad f_y(x,y) = 2y + 2$$
$$f_{xx}(x,y) = 6x - 10, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 2.$$

次に $\mathrm{grad} f(x,y) = \mathit{o}$ となる点を求めるわけですが、その様な点は連立方程式：

$$\begin{cases} 3x^2 - 10x + 8 = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

の解を求めれば良い事になります。

第１式は $(3x-4)(x-2) = 0$ ですから明らかに $x = \frac{4}{3}$ または $x = 2$ ですし、第２式からは直ちに $y = -1$ である事が分かりますので、$\mathrm{grad} f(x,y) = \mathit{o}$ となる点は２点 $(\frac{4}{3}, -1), (2, -1)$ である事が分かりました。

次にこれらの点に於いてヘシアンを計算して極値かどうかの判定をしましょう。

関数 f のヘシアンを H：

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x - 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

とすると、次のように判定されます。

<u>点 $(\frac{4}{3}, -1)$ について：</u>

$$H\left(\frac{4}{3}, -1\right) = -4 < 0$$

ヘシアンが負なのでこの点では極値ではない。

<u>点 $(2, -1)$ について：</u>

$$H(2, -1) = 4 > 0$$

ヘシアンは正なので点 $(2,-1)$ に於いて関数 f は極値であり、また、$f_{xx}(2,-1) = 2 > 0$ によればそれは極小値である事が分かります。関数の値も求めておくと $f(2,-1) = 3$ です。

以上により関数 f の極値は点 $(2,-1)$ での極小値 3 のみである事が分かりました。　□

基本演習 2　$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

【解答例】　まず偏導関数を求めておくと

$$f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = -3x + 3y^2$$
$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = f_{yx} = -3, \quad f_{yy} = 6y$$

ですから、$f_x = f_y = 0$ となる点は連立方程式：

$$x^2 - y = 0, \quad y^2 - x = 0$$

の解になりますが、第１式から $y = x^2$ なのでこれを第２式に代入すれば

$$0 = x^4 - x = x(x^3 - 1)$$

となり、$x = 0, 1$ が得られます（このとき $y = 0, 1$ です）。従って極値の候補点は $(0,0), (1,1)$ の２点です。

関数 $f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$$

として今求めた各候補点でのヘシアンの符号を見ると

$$H(0,0) = -9 < 0, \quad H(1,1) = 36 - 9 > 0$$

なので点 $(0,0)$ では極値ではなく、点 $(1,1)$ では極値である事が分かります。また、$f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ によればこの極値は極小値である事も分かります。$f(1,1) = -1$ ですから求める極値は点 $(1,1)$ での極小値 -1 のみです。　□

基本演習 3 $f(x,y)=8x^3+y^3-12xy$

【解答例】　まず偏導関数を求めておくと

$$f_x=24x^2-12y,\quad f_y=-12x+3y^2$$
$$f_{xx}=48x,\quad f_{xy}=f_{yx}=-12,\quad f_{yy}=6y$$

ですから、$f_x=f_y=0$ となる点は連立方程式：

$$2x^2-y=0,\quad y^2-4x=0$$

の解になりますが、第１式から $y=2x^2$ なのでこれを第２式に代入すれば

$$0=4x^4-4x=4x(x^3-1)$$

となり、$x=0,1$ が得られます（このとき $y=0,2$ です）。従って極値の候補点は $(0,0),(1,2)$ の２点です。

関数 $f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 48x & -12 \\ -12 & 6y\end{vmatrix}$$

として今求めた各候補点でのヘシアンの符号を見ると

$$H(0,0)=-12^2<0,\quad H(1,2)=48\cdot 12-12^2>0$$

なので点 $(0,0)$ では極値ではなく、点 $(1,2)$ では極値である事が分かります。また、$f_{xx}(1,2)=48>0$ によればこの極値は極小値である事も分かります。$f(1,2)=-8$ ですから求める極値は点 $(1,2)$ での極小値 -8 のみです。　□

基本演習 4 $f(x,y)=4x^3-y^3+3x^2y+9y$

【解答例】　まず２階までの各偏導関数を求めておきます。

$$f_x=12x^2+6xy,\quad f_y=-3y^2+3x^2+9,\quad f_{xx}=24x+6y,\quad f_{xy}=6x,\quad f_{yy}=-6y$$

すると、

$$\mathrm{grad}f(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2+6xy\\ -3y^2+3x^2+9\end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}24x+6y & 6x\\ 6x & -6y\end{vmatrix}$$

ですので、$\mathrm{grad}f(x,y)=\mathbf{0}$ となる点は連立方程式：

$$\begin{cases} x(2x+y)=0\\ x^2-y^2+3=0\end{cases}$$

の解であり、これを解くと、第１式から $x=0$ または $y=-2x$ であることがわかります。

$x=0$ の時は第２式から $y=\pm\sqrt{3}$ となり、また $y=-2x$ の時は同様に第２式から

$$\begin{aligned} x^2-4x^2+3 &=0\\ x^2 &=1\quad \text{すなわち}\quad x=\pm 1\end{aligned}$$

となるので、結局この連立方程式の解は $(x,y)=(0,\pm\sqrt{3}),\ (\pm1,\mp2)$ の４点です（複号同順、以下同様）。

そこでこれら４点について、２階微分の行列式を計算してみると、

$$(x,y)=(0,\pm\sqrt{3})\ \text{のとき、}\quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\pm6\sqrt{3} & 0\\ 0 & \mp6\sqrt{3}\end{vmatrix}<0\quad \text{：極値でない}$$

$$(x,y)=(\pm1,\mp2)\ \text{のとき、}\quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\pm12 & \pm6\\ \pm6 & \pm12\end{vmatrix}>0\quad \text{：極値である}$$

となり、更に f_{xx} の符号によれば、$(x,y)=(1,-2)$ では極小値 $f(1,-2)=-12$ であり、$(x,y)=(-1,2)$ では極大値 $f(-1,2)=12$ である事が分かります。

答え：$(x,y)=(1,-2)$ で極小値 -12、$(x,y)=(-1,2)$ で極大値 12

□

基本演習 5 $f(x,y)=3x^2+2y^3-6xy-3$

【解答例】　まず１階の偏導関数を見ると

$$f_x=6x-6y,\quad f_y=6y^2-6x$$

ですので、$\mathrm{grad} f(x,y)=\mathbb{o}$ となる点は連立方程式：

$$x-y=0,\quad y^2-x=0$$

を解けばよく、これは簡単に解けて $(x,y)=(0,0),(1,1)$ です。
　次に２階偏導関数を求めると

$$f_{xx}=6,\quad f_{xy}=f_{yx}=-6,\quad f_{yy}=12y$$

なので、$f(x,y)$ のヘシアン $H_f(x,y)$：

$$H_f(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12y \end{vmatrix}$$

を各点で計算すると

$$H_f(0,0)=-36<0,\quad H_f(1,1)=72-36>0$$

となっており、点 $(0,0)$ では f は極値ではなく、点 $(1,1)$ では極値である事が分かります。更に $f_{xx}(1,1)=6, f(1,1)=-4$ によればこれは極小値 -4 である事も分かります。
　以上から求める極値は点 $(1,1)$ での極小値 -4 のみです。　□

基本演習 6 $f(x,y)=x^3+3xy^2-3x$

【解答例】　１階の偏導関数は

$$f_x=3x^2+3y^2-3,\quad f_y=6xy$$

ですから $\mathrm{grad} f=\mathbb{o}$ となる点は $(0,\pm1),(\pm1,0)$ （複号同順でない）の４点です。
　次に２階偏導関数は

$$f_{xx}=6x,\quad f_{xy}=f_{yx}=6y,\quad f_{yy}=6x$$

ですから、$f(x,y)$ のヘシアンを $H(x,y)$ とすると：

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=36(x^2-y^2)$$

であり、２点 $(0,\pm1)$ では極値ではなく、２点 $(\pm1,0)$ では極値である事が分かります。また、f_{xx} の符号によれば $(1,0)$ で極小値 $f(1,0)=-2$、$(-1,0)$ で極大値 $f(-1,0)=2$ をとります。　□

基本演習 7 $f(x,y)=x^3+3xy^2-6x+1$

【解答例】　１階の偏導関数は

$$f_x=3x^2+3y^2-6,\quad f_y=6xy$$

ですから $\mathrm{grad} f=\mathbb{o}$ となる点は $(0,\pm\sqrt{2}),(\pm\sqrt{2},0)$ （複号同順でない）の４点です。
　次に２階偏導関数は

$$f_{xx}=6x,\quad f_{xy}=f_{yx}=6y,\quad f_{yy}=6x$$

ですから、$f(x,y)$ のヘシアンを $H(x,y)$ とすると：

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=36(x^2-y^2)$$

であり、２点 $(0,\pm\sqrt{2})$ では極値ではなく、２点 $(\pm\sqrt{2},0)$ では極値である事が分かります。また、f_{xx} の符号によれば $(\sqrt{2},0)$ で極小値 $f(\sqrt{2},0)=1-4\sqrt{2}$、$(-\sqrt{2},0)$ で極大値 $f(-\sqrt{2},0)=1+4\sqrt{2}$ をとります。　□

基本演習 8 $f(x,y)=x^3-12xy+6y^2$

【解答例】　まず偏微分を先にやってしまいます：

$$f_x=3x^2-12y,\quad f_y=-12x+12y$$
$$f_{xx}=6x,\quad f_{xy}=f_{yx}=-12,\quad f_{yy}=12$$

すると $\mathrm{grad} f=\mathbb{0}$ となる点は連立方程式：

$$x^2-4y=0,\quad x-y=0$$

を解けば求める事が出来ます。第 2 式から $x=y$ ですのでこれを第 1 式に代入すれば $x=0,4$ が得られます。従って極値の候補点は 2 点 $(0,0),(4,4)$ です。

$f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 12\end{vmatrix}$$

とすれば各点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0)=-12^2<0,\quad H(4,4)=24\cdot 12-12^2>0$$

となっていますからこれら候補点のうち実際に極値となるのは 1 点 $(4,4)$ のみであり、f_{yy} の符号から見てそれは極小値です。$f(4,4)=-32$ に注意すれば求める極値は点 $(4,4)$ での極小値 -32 のみです。 □

基本演習 9 $f(x,y)=3x^2+2y^3-6xy$

【解答例】　まず偏微分を先にやってしまいます：

$$f_x=6x-6y,\quad f_y=6y^2-6x$$
$$f_{xx}=6,\quad f_{xy}=f_{yx}=-6,\quad f_{yy}=12y$$

すると $\mathrm{grad} f=\mathbb{0}$ となる点は連立方程式：

$$x-y=0,\quad y^2-x=0$$

を解けば求める事が出来ます。第 1 式から $x=y$ ですのでこれを第 2 式に代入すれば $x=0,1$ が得られます。従って極値の候補点は 2 点 $(0,0),(1,1)$ です。

$f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12y\end{vmatrix}$$

とすれば各点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0)=-6^2<0,\quad H(1,1)=6\cdot 12-6^2>0$$

となっていますからこれら候補点のうち実際に極値となるのは 1 点 $(1,1)$ のみであり、f_{xx} の符号から見てそれは極小値です。$f(1,1)=-1$ に注意すれば求める極値は点 $(1,1)$ での極小値 -1 のみです。 □

基本演習 10 $f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$

【解答例】　まず１階の偏導関数を計算すると

$$f_x = 3(x+y)^2 - 12y, \quad f_y = 3(x+y)^2 - 12x$$

ですから、$f_x = f_y = 0$ となる点を求めるには連立方程式：

$$(x+y)^2 - 4y = 0, \quad (x+y)^2 - 4x = 0$$

の解を求めれば良いわけですが、２式から明らかに $x = y$ ですから、これを代入すると２式は同じ式 $0 = 4x^2 - 4x = 4x(x-1)$ になり、解は２点 $(0,0),(1,1)$ であることが分かります。

次に２階の偏導関数を計算すれば

$$f_{xx} = 6(x+y), \quad f_{xy} = f_{yx} = 6(x+y) - 12, \quad f_{yy} = 6(x+y)$$

ですから、f のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6(x+y) & 6(x+y)-12 \\ 6(x+y)-12 & 6(x+y) \end{vmatrix}$$

とすれば各点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0) = -12^2 < 0, \quad H(1,1) = 12^2 > 0$$

ですから前者では極値でなく、後者のみで極値である事が分かります。更に $fxx(1,1) = 12 > 0$ によればそれは極小値である事も分かり、$f(1,1) = -4$ から求める極値は点 $(1,1)$ での極小値 -4 のみである事が分かります。 □

基本演習 11 $f(x,y) = x^3 - 3x^2 - y^2$

【解答例】　まず必要となるであろう偏微分を先に計算しておきます：

$$f_x = 3x^2 - 6x, \quad f_y = -2y$$
$$f_{xx} = 6x - 6, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad f_{yy} = -2.$$

すると $\mathrm{grad} f = \mathbb{o}$ となる点は連立方程式：

$$x^2 - 2x = 0, \quad y = 0$$

を解けば求まりますが、これは簡単に解けて極値の候補点は２点 $(0,0),(2,0)$ です。

$f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

とすれば各点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0) = 12 > 0, \quad H(2,0) = -12 < 0$$

となっていますからこれら候補点のうち実際に極値となるのは１点 $(0,0)$ のみであり、f_{yy} の符号から見てそれは極大値です。

従って求める極値は点 $(0,0)$ での極大値 0 のみです。 □

基本演習 12 $f(x,y) = x^2 - 6x + 2xy^2 + 2y^2$

【解答例】　まず偏微分を計算すると

$$f_x = 2x - 6 + 2y^2, \quad f_y = 4xy + 4y$$

ですから $f_x = f_y = 0$ となる点を求めるには連立方程式：

$$x - 3 + y^2 = 0, \quad y(x+1) = 0$$

を解けばよく、$y = 0$ の時には第１式から $x = 3$ であり、$y \neq 0$ の時には第２式から $x = -1$ なのでこれを第１式に代入して $y = \pm 2$ が得られます。従って極値の候補点は３点 $(3,0), (-1,\pm 2)$ です。

次に２階の偏微分は

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 4y, \quad f_{yy} = 4x + 4$$

なので、ヘシアンを

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4y \\ 4y & 4x+4 \end{vmatrix}$$

とすれば各点でのヘシアンの符号は

$$H(3,0) = 32 > 0, \quad H(-1,\pm 2) = -8^2 < 0$$

ですから実際に極値となるのは１点 $(3,0)$ のみであり、f_{xx} の符号から判断してこれは極小値です。

従って求める極値は点 $(3,0)$ での極小値 $f(3,0) = -9$ のみです。 □

基本演習 13 $f(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + xy - 3y - \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x$

【解答例】　偏微分は

$$f_x = y - x^2 + 2x - 1, \quad f_y = y + x - 3$$

ですから、$\mathrm{grad} f = \mathit{o}$ となる点は連立方程式：

$$y - x^2 + 2x - 1 = 0, \quad y + x - 3 = 0$$

を解く事によって求める事が出来ます。

第２式から $y = 3 - x$ ですからこれを第１式に代入すれば

$$0 = 3 - x - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + x + 2 = -(x-2)(x+1)$$

が分かり、$x = 2, -1$ です。このとき $y = 1, 4$ ですから極値の候補点は２点 $(2,1), (-1,4)$ です。

次に２階の偏微分を計算すると

$$f_{xx} = -2x + 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 1, \quad f_{yy} = 1$$

なので f のヘシアンを：

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x+2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

とすれば各点でのヘシアンの符号は

$$H(2,1) = -2 - 1 < 0, \quad H(-1,4) = 4 - 1 > 0$$

ですから、極値をとるのは点 $(-1,4)$ のみであり、f_{yy} の符号からそれは極小値です。

以上から求める極値は点 $(-1,4)$ での極小値 $f(-1,4) = -\frac{17}{3}$ のみです。 □

基本演習 14 $f(x,y) = x(1-x^2-y^2)$

【解答例】　まず２階までの各偏導関数を求めておく。

$$f_x = 1 - x^2 - y^2 - 2x^2 = 1 - 3x^2 - y^2, \quad f_y = -2xy$$

$$f_{xx} = -6x, \quad f_{xy} = -2y, \quad f_{yy} = -2x$$

すると、

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 1-3x^2-y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6x & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} = 12x^2 - 4y^2$$

であるので、$\mathrm{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる点は連立方程式：

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 1 \\ xy = 0 \end{cases}$$

の解であり、これを解くと、第２式から $x=0$ または $y=0$ である。

$x=0$ のときは第１式から $y=\pm 1$ となり、また、$y=0$ の時は同様に第１式から $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ となるので、結局この連立方程式の解は $(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $(0,\pm 1)$ の４点である事が分かる。

そこでこれら４点について、２階微分の行列式を計算してみると、

$$(x,y) = (0,\pm 1) \text{ のとき、} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = -4 < 0 \quad \text{：極値でない}$$

$$(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \text{ のとき、} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \text{：極値である}$$

となり、更に f_{xx} の符号によれば、$(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ では極大値（$\frac{2}{3\sqrt{3}}$）であり、$(x,y) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ では極小値（$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$）である事が分かる。

答え：$(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ で極大値 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$、$(x,y) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ で極小値 $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$

□

基本演習 15 $f(x,y) = xy(3-x-y)$

【解答例】　まず１階の偏導関数を求めると

$$f_x = 3y - 2xy - y^2, \quad f_y = 3x - x^2 - 2xy$$

ですから、$f_x = f_y = 0$ となる点は連立方程式：

$$y(3-2x-y) = 0, \quad x(3-x-2y) = 0$$

を解けばよく、$y=0$ の時は第２式から

$$0 = x(3-x) = 0$$

となって $x = 0, 3$ であり、$y \neq 0$ の時は第１式から $y = 3-2x$ なのでこれを第２式に代入して

$$x(3-x-6+4x) = x(-3+3x) = 3x(x-1)$$

です。従って $x = 0, 1$ でありそれぞれの場合に $y = 3, 1$ となります。

以上から極値の候補点は４点 $(0,0), (3,0), (0,3), (1,1)$ です。

次に２階の偏導関数は

$$f_{xx} = -2y, \quad f_{xy} = f_{yx} = 3 - 2x - 2y, \quad f_{yy} = -2x$$

なので、f のヘシアンを

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{vmatrix}$$

とすれば各点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0) = -9 < 0, \quad H(3,0) = -9 < 0, \quad H(0,3) = -9 < 0, \quad H(1,1) = 4 - 1 > 0$$

ですから極値は１点 $(1,1)$ のみであり、$f_{xx}(1,1) = -2 > 0$ からそれは極大値です。

以上から求める極値は点 $(1,1)$ での極大値 $f(1,1) = 1$ のみです。　□

基本演習 **16** $f(x,y)=xy(x+2y-6)$

【解答例】　まず２階までの各偏導関数を求めておきます。

$$f_x=2xy+2y^2-6y,\quad f_y=x^2+4xy-6x$$
$$f_{xx}=2y,\quad f_{xy}=2x+4y-6,\quad f_{yy}=4x$$

すると $\mathrm{grad} f(x,y)=\mathbb{o}$ となる点は連立方程式：

$$2y(x+y-3)=0,\quad x(x+4y-6)=0$$

の解であり、これを解くと、第１式から $y=0$ または $y=-x+3$ です。
$y=0$ の時は第２式から $x=0,\,6$ となり、また $y=-x+3$ の時は同様に第２式から

$$x(-3x+6)=0$$

となるので $x=0,2$ が分かり、結局この連立方程式の解は

$$(x,y)=(0,0),\,(6,0),\,(0,3),\,(2,1)$$

の４点である事が分かります。そこでこれら４点について、$f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$：

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2y & 2x+4y-6 \\ 2x+4y-6 & 4x \end{vmatrix}$$

を計算してみると、

$$(x,y)=(0,0)\text{ のとき、}\quad H(0,0)=\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}<0\quad\text{：極値でない}$$

$$(x,y)=(6,0)\text{ のとき、}\quad H(6,0)=\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 24 \end{vmatrix}<0\quad\text{：極値でない}$$

$$(x,y)=(0,3)\text{ のとき、}\quad H(0,3)=\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}<0\quad\text{：極値でない}$$

$$(x,y)=(2,1)\text{ のとき、}\quad H(2,1)=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}>0\quad\text{：極値である}$$

となり、更に f_{xx} の符号によれば、$(x,y)=(2,1)$ では極小値 $f(2,1)=-4$ である事が分かります。

答え：$(x,y)=(2,1)$ で極小値 -4

□

基本演習 **17** $f(x,y)=x^2+2y^2+6x+4y+2xy+14$

【解答例】　まず１階の偏導関数を求めると

$$f_x=2x+6+2y,\quad f_y=4y+4+2x$$

となっていますから、$f_x=f_y=0$ となる点は連立方程式：

$$x+y+3=0,\quad x+2y+2=0$$

の解になりますが、これは簡単に解けて $(x,y)=(-4,1)$ です。

次いで２階の偏導関数を計算すれば

$$f_{xx}=2,\quad f_{xy}=f_{yx}=2,\quad f_{yy}=4$$

であり、f のヘシアン H は

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4>0$$

ですから候補点 $(-4,1)$ は極小値（$f_{xx}>0$ による）である事が分かります。

以上から求める極値は点 $(-4,1)$ での極小値 $f(-4,1)=4$ のみです。　□

基本演習 18 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-4x-y$

【解答例】　まず１階の偏導関数を求めると

$$f_x=2x-y-4,\quad f_y=-x+2y-1$$

となっていますから、$f_x=f_y=0$ となる点は連立方程式：

$$2x-y-4=0,\quad x-2y+1=0$$

の解になりますが、これは簡単に解けて $(x,y)=(3,2)$ です。

次いで２階の偏導関数を計算すれば

$$f_{xx}=2,\quad f_{xy}=f_{yx}=-1,\quad f_{yy}=2$$

であり、f のヘシアン H は

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4-1>0$$

ですから候補点 $(3,2)$ は極小値（$f_{xx}>0$ による）である事が分かります。

以上から求める極値は点 $(3,2)$ での極小値 $f(3,2)=-7$ のみです。 □

基本演習 19 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x+2y$

【解答例】　まず１階の偏導関数を求めると

$$f_x=2x+y-2,\quad f_y=x+2y+2$$

となっていますから、$f_x=f_y=0$ となる点は連立方程式：

$$2x+y-2=0,\quad x+2y+2=0$$

の解になりますが、これは簡単に解けて $(x,y)=(2,-2)$ です。

次いで２階の偏導関数を計算すれば

$$f_{xx}=2,\quad f_{xy}=f_{yx}=1,\quad f_{yy}=2$$

であり、f のヘシアン H は

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1>0$$

ですから候補点 $(2,-2)$ は極小値（$f_{xx}>0$ による）である事が分かります。

以上から求める極値は点 $(2,-2)$ での極小値 $f(2,-2)=-4$ のみです。 □

基本演習 20 $f(x,y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$

【解答例】　まず１階の偏導関数を求めると

$$f_x = -4x - y + 2, \quad f_y = -x - 2y - 3$$

となっていますから、$f_x = f_y = 0$ となる点は連立方程式：

$$4x + y - 2 = 0, \quad x + 2y + 3 = 0$$

の解になりますが、これは簡単に解けて $(x,y) = (1,-2)$ です。

次いで２階の偏導関数を計算すれば

$$f_{xx} = -4, \quad f_{xy} = f_{yx} = -1, \quad f_{yy} = -2$$

であり、f のヘシアン H は

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 7 > 0$$

ですから候補点 $(1,-2)$ は極大値（$f_{xx} < 0$ による）である事が分かります。

以上から求める極値は点 $(1,-2)$ での極大値 $f(1,-2) = 5$ のみです。　□

基本演習 21 $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1$

【解答例】　まず１階の偏導関数を求めると

$$f_x = 2x + 2y - 2, \quad f_y = 2x + 4y - 2$$

となっていますから、$f_x = f_y = 0$ となる点は連立方程式：

$$x + y - 1 = 0, \quad x + 2y - 1 = 0$$

の解になりますが、これは簡単に解けて $(x,y) = (1,0)$ です。

次いで２階の偏導関数を計算すれば

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 2, \quad f_{yy} = 4$$

であり、f のヘシアン H は

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

ですから候補点 $(1,0)$ は極小値（$f_{xx} > 0$ による）である事が分かります。

以上から求める極値は点 $(1,0)$ での極小値 $f(1,0) = 0$ のみです。　□

基本演習 22 $f(x,y)=x^2-xy+y^2+1$

【解答例】　まず１階の偏導関数を求めると

$$f_x=2x-y,\quad f_y=-x+2y$$

となっていますから、$f_x=f_y=0$ となる点は $(x,y)=(0,0)$ のみです。

次いで２階の偏導関数を計算すれば

$$f_{xx}=2,\quad f_{xy}=f_{yx}=-1,\quad f_{yy}=2$$

であり、f のヘシアン H は

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4-1>0$$

ですから候補点 $(0,0)$ は極小値（$f_{xx}>0$ による）である事が分かります。

以上から求める極値は点 $(0,0)$ での極小値 $f(0,0)=1$ のみです。 □

基本演習 23 $f(x,y)=x^2+2\alpha xy+y^2$ （ただし $\alpha^2\neq 1$）

【解答例】　まず１階の偏導関数を求めると

$$f_x=2x+2\alpha y,\quad f_y=2\alpha x+2y$$

となっていますから、$f_x=f_y=0$ となる点は $\alpha^2\neq 1$ によれば $(x,y)=(0,0)$ のみです。

次いで２階の偏導関数を計算すれば

$$f_{xx}=2,\quad f_{xy}=f_{yx}=0,\quad f_{yy}=2$$

であり、f のヘシアン H は

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0$$

ですから候補点 $(0,0)$ は極小値（$f_{xx}>0$ による）である事が分かります。

以上から求める極値は点 $(0,0)$ での極小値 $f(0,0)=0$ のみです。 □

基本演習 24 $f(x,y)=x^2-4x+y^4-8y^2$

【解答例】　１階の偏導関数は

$$f_x=2x-4,\quad f_y=4y^3-16y$$

ですから、$f_x=f_y=0$ を満たす点は $(x,y)=(2,0),(2,\pm 2)$ の３点です。

次に２階の偏導関数は

$$f_{xx}=2,\quad f_{xy}=f_{yx}=0,\quad f_{yy}=12y^2-16$$

であり、f のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2-16 \end{vmatrix}$$

とすれば、各候補点でのヘシアンの符号は

$$H(2,0)=-32<0,\quad H(2,\pm 2)=64>0$$

ですから点 $(2,0)$ では極値ではありません。更に

$$f_{xx}>0,\quad f(2,\pm 2)=-20$$

によれば結局求める極値は点 $(2,\pm 2)$ での極大値 -20 のみである事が分かります。 □

基本演習 25 $f(x,y) = x^4 - 2xy - x^2 + y^2$

【解答例】　１階の偏導関数は

$$f_x = 4x^3 - 2y - 2x, \quad f_y = -2x + 2y$$

ですから、$f_x = f_y = 0$ を満たす点は連立方程式：

$$2x^3 - y - x = 0, \quad x - y = 0$$

の解を求めればよく、第２式から $x = y$ ですのでこれを第１式に代入して

$$0 = 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1)$$

から $(x,y) = (0,0), (\pm 1, \pm 1)$ の３点（複号同順）です。これが極値の候補点です。

次に２階の偏導関数は

$$f_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = -2, \quad f_{yy} = 2$$

であり、f のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

とすれば、各候補点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0) = -4 - 4 < 0, \quad H(\pm 1, \pm 1) = 20 - 4 > 0$$

ですから点 $(0,0)$ では極値ではありません。更に

$$f_{yy} > 0, \quad f(\pm 1, \pm 1) = -1$$

によれば結局求める極値は点 $(\pm 1, \pm 1)$ での極小値 -1 のみである事が分かります。　□

基本演習 26 $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$

【解答例】　まず２階までの各偏導関数を求めておくと

$$f_x = 4x(x^2 + y^2) - 4x, \quad f_y = 4y(x^2 + y^2) + 4y$$

$$f_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 4, \quad f_{xy} = 8xy, \quad f_{yy} = 4x^2 + 12y^2 + 4$$

です。すると、

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x(x^2 + y^2 - 1) \\ 4y(x^2 + y^2 + 1) \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 + 4y^2 - 4 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 + 4 \end{vmatrix}$$

なので、$\mathrm{grad} f(x,y) = \mathbb{o}$ となる点は連立方程式：

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

の解であり、これを解けば良い事が分かります。

まず第２式から $y = 0$ でありこれを第１式に代入すると $x(x^2 - 1) = 0$ すなわち $x = 0, \pm 1$ となりますので、結局この連立方程式の解は $(x,y) = (0,0), (\pm 1, 0)$ の３点である事が分かります。

そこでこれら３点について、２階微分の行列式（ヘシアン）を計算してみると、

$$(x,y) = (0,0) \text{ のとき、} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} < 0 \quad \text{：極値でない}$$

$$(x,y) = (\pm 1, 0) \text{ のとき、} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{：極値である}$$

となり、更に f_{xx} の符号によれば、$(x,y) = (\pm 1, 0)$ で極小値 $f(\pm 1, 0) = -1$ である事が分かります。

答え：$(x,y) = (\pm 1, 0)$ で極小値 -1

□

基本演習 **27**　$f(x,y) = xy(x^2+y^2-1)$

【解答例】　まず偏微分すると

$$f_x = 3yx^2 + y^3 - y, \quad f_y = x^3 + 3xy^2 - x$$

ですから、$f_x = f_y = 0$ となる点は連立方程式：

$$y(3x^2+y^2-1) = 0, \quad x(x^2+3y^2-1) = 0$$

の解になります。

まず $x=0$ の時は第 2 式は満たされていますので第 1 式を見ると $y(y^2-1)=0$ ですから $y = 0, \pm 1$ です。

また、$x \neq 0$ の時は第 2 式から $x^2 = 1-3y^2$ ですからこれを第 1 式に代入すれば

$$0 = y(3-9y^2+y^2-1) = y(2-8y^2) = 2y(1-4y^2)$$

が得られ、$y = 0, \pm\frac{1}{2}$ です。このとき x はそれぞれ $x = \pm 1, \pm\frac{1}{2}$ です（複号同順でない)。

従って極値の候補点は $(0,0), (0,\pm 1), (\pm 1, 0), \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ の 9 点です。

次に 2 階の偏微分を計算すると

$$f_{xx} = 6xy, \quad f_{xy} = f_{yx} = 3x^2+3y^2-1, \quad f_{yy} = 6xy$$

ですから、$f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6xy & 3x^2+3y^2-1 \\ 3x^2+3y^2-1 & 6xy \end{vmatrix}$$

とすれば、各候補点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0) = -1 < 0, \quad H(0,\pm 1) = -4 < 0, \quad H(\pm 1, 0) = -4 < 0,$$
$$H\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 > 0$$

となっていますから実際に極値となるのは 2 点 $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ のみです。

$$f_{xx}\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 0, \quad f\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

によれば求める極値は点 $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ での極小値 $-\frac{1}{8}$ のみです。　□

基本演習 **28**　$f(x,y) = x^4(x-2)^2 + y^2$

【解答例】　まず 1 階の偏導関数は

$$f_x = 4x^3(x-2)^2 + 2x^4(x-2) = 2x^3(x-2)(3x-4), \quad f_y = 2y$$

ですから、$f_x = f_y = 0$ となる点は $(x,y) = (0,0), (2,0), \left(\frac{4}{3}, 0\right)$ の 3 点です。

次に 2 階の偏導関数は

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x^2(x-2)(3x-4) + 2x^3(3x-4) + 6x^3(x-2) \\ &= 2x^2\{3(x-2)(3x-4) + x(3x-4) + 3x(x-2)\} \\ &= 2x^2(15x^2-40x+24) \\ f_{yy} &= 2 \quad f_{xy} = f_{yx} = 0 \end{aligned}$$

ですから、$f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x^2(15x^2-40x+24) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

とすれば、各候補点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0) = 0, \quad H(2,0) = 64 > 0,$$
$$H\left(\frac{4}{3}, 0\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^2 \left\{15\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 40\frac{4}{3} + 24\right\} = \frac{4^3}{3^3}(5\cdot 16 - 40\cdot 4 + 24\cdot 3) < 0$$

となっていますから点 $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ は極値ではなく、点 $(2,0)$ は極値です。

$$f_{yy} > 0, \quad f(2,0) = 0$$

によればこれは極小値 0 です。

また原点ではヘシアンが 0 なのでこの方法では判定出来ませんが、原点以外では $f(x,y) > 0$ なので原点での値 $f(0,0) = 0$ は極小値です。

以上から求める極値は点 $(0,0)$ での極小値 0 と点 $(2,0)$ での極小値 0 です。　□

基本演習 29 $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

【解答例】　まず２階までの各偏導関数を求めておきましょう。

$$f_x = (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}, \quad f_y = -2xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \{-4x - 2x(1-2x^2)\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ &= -2x(3-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ f_{xy} &= -2y(1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ f_{yy} &= \{-2x - 2y(-2xy)\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ &= -2x(1-2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

すると、

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ -2xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x(2x^2-3) & 2y(2x^2-1) \\ 2y(2x^2-1) & 2x(2y^2-1) \end{vmatrix} \mathrm{e}^{-2(x^2+y^2)}$$

ですので、$\mathrm{grad} f(x,y) = \mathbb{o}$ となる点は連立方程式：

$$\begin{cases} 1-2x^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

の解であり、これを解くと、第１式から $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、従って第２式から $y=0$ となり、結局この連立方程式の解は $(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ の２点である事が分かります。

そこでこれら２点について、２階微分の行列式（ヘシアン）を計算してみると、

$$(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \text{ のとき、} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mp 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{2} \end{vmatrix} \mathrm{e}^{-1} > 0 \quad \text{：極値である}$$

となり、更に f_{xx} の符号によれば、$(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ では極大値（$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$）であり、また $(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ では極小値（$-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$）である事が分かります。

答え：$(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ で極大値（$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$）、$(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ で極小値（$-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$）

□

基本演習 30 $f(x,y) = \mathrm{e}^x(x^2+y^2)$

【解答例】　まず１階の偏微分を計算すると

$$f_x = (x^2+2x+y^2)\mathrm{e}^x, \quad f_y = 2y\mathrm{e}^x$$

ですから、$f_x = f_y = 0$ となる点は連立方程式：

$$x^2+2x+y^2 = 0, \quad y = 0$$

の解になります。これは簡単に解けて $(x,y) = (0,0), (-2,0)$ の２点です。

更に２階の偏微分は

$$f_{xx} = (x^2+4x+y^2+2)\mathrm{e}^x, \quad f_{xy} = f_{yx} = 2y\mathrm{e}^x, \quad f_{yy} = 2\mathrm{e}^x$$

ですから $f(x,y)$ のヘシアンを

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+4x+y^2+2 & 2y \\ 2y & 2 \end{vmatrix} \mathrm{e}^{2x}$$

とすれば、各候補点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0) = 4 > 0, \quad H(-2,0) = -4\mathrm{e}^{-4} < 0$$

となっているため実際に極値となるのは原点のみです。$f_{yy} > 0$ によればこれは極小値であって $f(0,0) = 0$ から求める極値は原点での極小値 0 のみです。 □

発展演習 31 $f(x,y)=x^3+2x^2y-xy^2-4xy$

【解答例】　まず２階までの各偏導関数を求めておきましょう。

$$f_x=3x^2+4xy-y^2-4y,\quad f_y=2x^2-2xy-4x$$
$$f_{xx}=6x+4y,\quad f_{xy}=4x-2y-4,\quad f_{yy}=-2x$$

すると、$\mathrm{grad} f(x,y)=\mathit{o}$ となる点は連立方程式：

$$\begin{cases}3x^2+4xy-y^2-4y=0\\2x^2-2xy-4x=0\end{cases}$$

の解であって、これを解くと第２式から $2x(x-y-2)=0$ となるので $x=0$ または $x-y=2$ です。

$x=0$ のときは第１式から $y(y+4)=0$ すなわち $y=0,-4$ となり、また、$x-y=2$ の時は同様に第１式から

$$\begin{aligned}3x^2+4x(x-2)-(x-2)^2-4(x-2)&=0\\6x^2-8x+4&=0\end{aligned}$$

となりますが、この２次方程式の判別式は負：

$$64-4\cdot 6\cdot 4=-32<0$$

なので実数解はない事が分かります。

従って、結局この連立方程式の解は $(x,y)=(0,0),\ (0,-4)$ の２点である事が分かりました。これが極値の候補点です。

そこでこれら２点について、２階微分の行列式を計算してみると、

$$(x,y)=(0,0)\text{ のとき、}\quad \begin{vmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{xy}&f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-4\\-4&0\end{vmatrix}<0\quad \text{：極値でない}$$

$$(x,y)=(0,-4)\text{ のとき、}\quad \begin{vmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{xy}&f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-16&4\\4&0\end{vmatrix}<0\quad \text{：極値でない}$$

となり、極値はない事が分かる。 □

発展演習 32 $f(x,y)=x^3-3x^2y+3xy^2-3x$

【解答例】　まず１階の偏導関数は

$$f_x=3x^2-6xy+3y^2-3,\quad f_y=-3x^2+6xy$$

ですから、$\mathrm{grad} f=\mathit{o}$ となる点は連立方程式：

$$x^2-2xy+y^2-1=0,\quad x^2-2xy=0$$

の解ですが、第２式の形から $x=0$ のときを考えれば第１式から $y=\pm1$ が得られます。

また $x\neq 0$ の場合は第２式から $x=2y$ ですからこれを第１式に代入して同様に $y=\pm1$ が得られます。

以上から極値の候補点は $(0,\pm1),(\pm2,\pm1)$ の４点です（それぞれの括弧内で複号同順）。

２階の偏導関数は

$$f_{xx}=6x-6y,\quad f_{xy}=f_{yx}=-6x+6y,\quad f_{yy}=6x$$

ですから各点で f のヘシアン H：

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}f_{xx}(x,y)&f_{xy}(x,y)\\f_{yx}(x,y)&f_{yy}(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6x-6y&6y-6x\\6y-6x&6x\end{vmatrix}=36\begin{vmatrix}0&y-x\\y&x\end{vmatrix}=36y(x-y)$$

を計算すれば、

$$H(0,\pm1)=-36<0,\quad H(\pm2,\pm1)=36>0$$

なので後者の２点のみで極値である事が分かります。更に

$$f(\pm2,\pm1)=\mp4,\quad f_{yy}(\pm2,\pm1)=\pm12$$

であることによれば、$f(x,y)$ の極値は $(2,1)$ での極小値 -4 と $(-2,-1)$ での極大値 4 のみです。 □

発展演習 33 $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 - 2xy + 3y^2 + 1$

【解答例】　まず微分計算をしておきましょう。

$$f_x = 4xy + 4x - 2y, \quad f_y = 2x^2 - 2x + 6y$$
$$f_{xx} = 4y + 4, \quad f_{xy} = f_{yx} = 4x - 2, \quad f_{yy} = 6$$

すると $\mathrm{grad} f = \mathbb{o}$ となる点は連立方程式：

$$2xy + 2x - y = 0, \quad x^2 - x + 3y = 0$$

の解になります。

まず第２式から $3y = x - x^2$ ですから、これを第１式を３倍したものに代入すれば

$$\begin{aligned} 0 &= 2x(x - x^2) + 6x - (x - x^2) \\ &= -2x^3 + 3x^2 + 5x \\ 0 &= x(2x^2 - 3x - 5) \\ &= x(2x - 5)(x + 1) \end{aligned}$$

となりますので、$x = 0, \frac{5}{2}, -1$ が分かり、それぞれの場合に y は $0, -\frac{5}{4}, -\frac{2}{3}$ となります。

以上から極値の候補点は $(0,0), \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}\right), \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ の３点です。

次にこれらの候補点で f のヘシアン H：

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4y + 4 & 4x - 2 \\ 4x - 2 & 6 \end{vmatrix}$$

の符号を調べると、

$$H(0,0) = 24 - 2^2 > 0, \quad H\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}\right) = -6 - 8^2 < 0, \quad H\left(-1, -\frac{2}{3}\right) = 8 - 6^2 < 0$$

からこのうち極値となるのは $(0,0)$ のみであり、f_{yy} の符号から判断してこれは極小値です。$f(0,0) = 1$ なので、求める極値は $(0,0)$ での極小値 1 のみです。 □

発展演習 34 $f(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 - 3x^2$

【解答例】　まず２階までの偏微分を求めると

$$f_x = 6x^2 + 6xy - 6y^2 - 6x, \quad f_y = 3x^2 - 12xy + 9y^2$$
$$f_{xx} = 12x + 6y - 6, \quad f_{xy} = f_{yx} = 6x - 12y, \quad f_{yy} = -12x + 18y$$

です。従ってまず $f_x = f_y = 0$ となる点は連立方程式：

$$x^2 + xy - y^2 - x = 0, \quad x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$$

の解として求める事が出来ます。第１式の３倍と第２式を辺々加えれば

$$0 = 3x^2 + 3xy - 3y^2 - 3x + x^2 - 4xy + 3y^2 = 4x^2 - xy - 3x = x(4x - y - 3)$$

ですので、$x = 0$ であるかどうかで場合分けしてみましょう。

$x = 0$ の時は２式は共に $y^2 = 0$ となりますから $y = 0$ を得ます。

$x \neq 0$ の時は $y = 4x - 3$ ですから、これを第１式に代入すれば

$$0 = x^2 + x(4x - 3) - (4x - 3)^2 - x = -11x^2 + 20x - 9 = -(11x - 9)(x - 1)$$

が得られ、$x = \frac{9}{11}, 1$ である事が分かります。それぞれの場合 y は $\frac{3}{11}, 1$ です。以上から極値の候補点は３点 $(0,0), \left(\frac{9}{11}, \frac{3}{11}\right), (1,1)$ です。

これらの候補点においてヘシアン H：

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x + 6y - 6 & 6x - 12y \\ 6x - 12y & -12x + 18y \end{vmatrix}$$

の符号を調べると、

$$H(0,0) = 0, \quad H\left(\frac{9}{11}, \frac{3}{11}\right) = \begin{vmatrix} \frac{60}{11} & \frac{18}{11} \\ \frac{18}{11} & -\frac{54}{11} \end{vmatrix} < 0, \quad H(1,1) = 12 \cdot 6 - 6^2 > 0$$

となっており、点 $\left(\frac{9}{11}, \frac{3}{11}\right)$ は極値ではなく、点 $(1,1)$ は極値になっています。更に $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ によればこれは極小値です。値は $f(1,1) = -1$ です。

点 $(0,0)$ ではヘシアンが０なのでこの方法では極値の判定が出来ません。そこで定義域を y-軸に制限して考えると $f(x,y) = 3y^3$ となっており、y の正負によってこの関数の値は原点の近くで正にも負にもなります。従って原点では極値ではあり得ません。

以上から求める極値は点 $(1,1)$ での極小値 -1 のみです。 □

発展演習 35 $f(x,y) = x^2y + xy^2 + y^3 - y$

【解答例】　まず 1 階の偏導関数を求めましょう：

$$f_x = 2xy + y^2, \quad f_y = x^2 + 2xy + 3y^2 - 1$$

すると $f_x = f_y = 0$ となる点は連立方程式：

$$y(2x+y) = 0, \quad x^2 + 2xy + 3y^2 - 1 = 0$$

の解として得られます。まず第 1 式の形から $y = 0$ かどうかで場合分けします。

$y = 0$ のときは第 2 式は $x^2 - 1 = 0$ ですから $x = \pm 1$ が分かります。

$y \neq 0$ のときは第 1 式から $y = -2x$ ですからこれを第 2 式に代入して

$$0 = x^2 - 4x^2 + 12x^2 - 1 = 9x^2 - 1$$

ですから $x = \pm\frac{1}{3}$ です。

以上から極値の候補点は $(\pm 1, 0), \left(\pm\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3}\right)$ の 4 点です（複号同順)。

次に 2 階の偏導関数を計算すると

$$f_{xx} = 2y, \quad f_{xy} = f_{yx} = 2x + 2y, \quad f_{yy} = 2x + 6y$$

ですから、$f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 2x+6y \end{vmatrix}$$

とすれば、各点でのヘシアンの符号は

$$H(\pm 1, 0) = -2^2 < 0, \quad H\left(\pm\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3}\right) = \begin{vmatrix} \mp\frac{4}{3} & \mp\frac{2}{3} \\ \mp\frac{2}{3} & \mp\frac{10}{3} \end{vmatrix} > 0$$

となりますから、極値は $\left(\pm\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3}\right)$ の 2 点のみであり、

$$f\left(\pm\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3}\right) = \pm\frac{4}{9}, \quad f_{xx}\left(\pm\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3}\right) = \mp\frac{4}{3}$$

から求める極値は点 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ での極大値 $\frac{4}{9}$ と点 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ での極小値 $-\frac{4}{9}$ のみである事が分かります。 □

発展演習 36 $f(x,y) = 2x^2 - 6x^2y + 2y^3$

【解答例】　偏微分は

$$f_x = 4x - 12xy, \quad f_y = -6x^2 + 6y^2$$

ですから、$\mathrm{grad} f = \mathit{o}$ となる点は連立方程式：

$$x(1-3y) = 0, \quad x^2 - y^2 = 0$$

の解になりますが、これは簡単に解けて極値の候補は $(0,0), \left(\pm\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ の 3 点です。

次に 2 階の偏微分を計算すれば

$$f_{xx} = 4 - 12y, \quad f_{xy} = f_{yx} = -12x, \quad f_{yy} = 12y$$

となりますから $f(x,y)$ のヘシアン $H_f(x,y)$ を

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-12y & -12x \\ -12x & 12y \end{vmatrix}$$

とすれば各点でのヘシアンの符号は

$$H_f(0,0) = 0, \quad H_f\left(\pm\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -4^2 < 0$$

となっていますので後者の 2 点は極値ではありません。

候補点 $(0,0)$ ではヘシアンが 0 なのでこの方法では極値かどうか判定出来ませんが定義域を y-軸に制限して考えれば関数は $f(x,y) = 2y^3$ となり、原点の近くで正にも負にもなっていますから原点では極値ではありません。

以上からこの関数は極値をもちません。 □

発展演習 37 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$

【解答例】　まず偏微分すると

$$f_x = 4x^3 - 8(x-y), \quad f_y = 4y^3 + 8(x-y)$$

$$f_{xx} = 12x^2 - 8, \quad f_{xy} = f_{yx} = 8, \quad f_{yy} = 12y^2 - 8$$

ですので、$\mathrm{grad} f(x,y) = \mathit{o}$ となる点は次の連立方程式を解けば良く：

$$x^3 - 2(x-y) = 0, \quad y^3 + 2(x-y) = 0$$

辺々足せば $x^3 + y^3 = 0$ であり、$x = -y$ が分かりますからこれを第 1 式に戻すと

$$0 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$$

となって $x = 0, \pm 2$ が分かります。つまり極値の候補点は $(0,0), (2,-2), (-2,2)$ です。

次に f のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 - 8 & 8 \\ 8 & 12y^2 - 8 \end{vmatrix}$$

とすれば、各候補点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0) = 0, \quad H(2,-2) = 40^2 - 8^2 > 0, \quad H(-2,2) = 40^2 - 8^2 > 0$$

であり、更に

$$f_{xx}(\pm 2, \mp 2) = 40 > 0, \quad f(\pm 2, \mp 2) = -16$$

から 2 点 $(\pm 2, \mp 2)$ では極小値 -16 をとる事が分かります（複号同順）。

また、原点ではヘシアンが 0 なのでこの方法では判定出来ませんが、定義域を直線 $y = x$ 上に制限するとこの直線上（原点は除く）では $f(x,y) = x^4 + y^4 > 0$ ですが、定義域を直線 $y = -x$ 上に制限するとこの直線上では $f(x,y) = 2x^4 + 16x^2 = 2x^2(x^2 - 8)$ ですから原点の十分近くでは（原点は除く）$f(x,y) < 0$ です。この様に原点の近くに関数の値が正になる点も負になる点も両方ありますからこの関数は原点では極値ではありません。

以上から求める極値は 2 点 $(\pm 2, \mp 2)$ での極小値 -16 のみです。 □

発展演習 38 $f(x,y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 6y^2$

【解答例】　まず 1 階の偏導関数を計算すると

$$f_x = 4x^3 + 12xy^2, \quad f_y = 12x^2y + 4y^3 - 12y$$

ですから、$f_x = f_y = 0$ となる点は連立方程式：

$$x(x^2 + 3y^2) = 0, \quad y(3x^2 + y^2 - 3) = 0$$

を解いて求まります。まず第 1 式から $x = 0$ ですのでこれを第 2 式に代入して

$$0 = y(y^2 - 3)$$

が得られますので極値の候補点は $(0,0), (0, \pm\sqrt{3})$ の 3 点です。

そこで 2 階の偏導関数を計算して

$$f_{xx} = 12x^2 + 12y^2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 24xy, \quad f_{yy} = 12x^2 + 12y^2 - 12$$

ヘシアンを

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 + 12y^2 & 24xy \\ 24xy & 12x^2 + 12y^2 - 12 \end{vmatrix}$$

とすれば、各候補点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0) = 0, \quad H(0, \pm\sqrt{3}) = 36 \cdot 24 > 0$$

ですから、$f_{xx}(0, \pm\sqrt{3}) > 0$ に注意すれば関数 $f(x,y)$ は 2 点 $(0, \pm\sqrt{3})$ で極小値をとる事が分かります。$f(0, \pm\sqrt{3}) = -9$ です。

原点ではヘシアンが 0 なのでこの方法では極値かどうか判定出来ませんが定義域を y-軸に制限して考えればこの軸上では $f(x,y) = -6y^2$ から原点の近く（原点は除く）では関数の値は負です。しかし定義域を x-軸に制限して考えると x-軸上での関数の値は $f(x,y) = x^4$ ですから原点の近くでは正です。

この様に原点の近くには正の値をとる点も負の値をとる点もどちらも存在しますから原点では極値ではありません。

以上から求める極値は点 $(0, \pm\sqrt{3})$ での極小値 -9 のみです。 □

発展演習 39 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

【解答例】　まず１階の偏導関数は

$$f_x = 4x^3 - 4y, \quad f_y = 4y^3 - 4x$$

ですから、$\mathrm{grad} f(x,y) = o$ となる点は連立方程式：

$$x^3 - y = 0, \quad y^3 - x = 0$$

の解として求める事が出来ます。対称性から考えて $x = y$ であるかそうでないかで分類して考えます。

まず $x = y$ の時は２式は同じ式 $x(x^2 - 1) = 0$ であり、解は $x = y = 0, \pm 1$ です。

$x \neq y$ の時は辺々引いた式から

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - y^3 + x - y \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) \\ 0 &= x^2 + xy + y^2 + 1 \end{aligned}$$

が得られますからここに第１式から得られる $y = x^3$ を代入すれば

$$0 = x^2 + x^4 + x^6 + 1$$

となってこれを満たす実数 x は存在しません。

以上から極値の候補点は３点 $(0,0), (1,1), (-1,-1)$ です。

次に２階の偏導関数を計算すれば

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{xy} = f_{yx} = -4, \quad f_{yy} = 12y^2$$

ですから $f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix}$$

とすれば、各候補点でのヘシアンの符号は

$$H(0,0) = -16 < 0, \quad H(\pm 1, \pm 1) = 12^2 - 4^2 > 0 \quad \text{（複号同順）}$$

ですから $f_{xx}(\pm 1, \pm 1) > 0, f(\pm 1, \pm 1) = -2$ から求める極値は２点 $(\pm 1, \pm 1)$ での極小値 -2 のみです（複号同順）。 □

発展演習 40 $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

【解答例】　まず２階までの各偏導関数を求めておくと

$$\begin{aligned} f_x &= \{2x - 2x(x^2 + 2y^2)\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 2x(1 - x^2 - 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ f_y &= \{4y - 2y(x^2 + 2y^2)\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 2y(2 - x^2 - 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \{2 - 6x^2 - 4y^2 - 4x^2(1 - x^2 - 2y^2)\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ f_{xy} &= \{-8xy - 4xy(1 - x^2 - 2y^2)\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = -4xy(3 - x^2 - 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ f_{yy} &= \{4 - 2x^2 - 12y^2 - 4y^2(2 - x^2 - 2y^2)\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

です。すると、$\mathrm{grad} f(x,y) = o$ となる点は連立方程式：

$$\begin{cases} 2x(1 - x^2 - 2y^2) = 0 \\ 2y(2 - x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

の解であり、これを解くと、第１式から $x = 0$ または $x^2 + 2y^2 = 1$ となるので、$x = 0$ の時には第２式から $y(1 - y^2) = 0$ すなわち $y = 0, \pm 1$ となる事が分かります。一方、$x^2 + 2y^2 = 1$ の時にも同様に第２式から $y = 0$ が分かります（このとき x は ± 1）。従って、結局この連立方程式の解は $(x,y) = (0,0), (0,\pm 1), (\pm 1, 0)$ の５点です。

そこでこれら５点について、２階微分の行列式（ヘシアン）を計算してみると、

$$(x,y) = (0,0) \text{ のとき、} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{：極値である}$$

$$(x,y) = (0,\pm 1) \text{ のとき、} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & -8\mathrm{e}^{-1} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{：極値である}$$

$$(x,y) = (\pm 1, 0) \text{ のとき、} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4\mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e}^{-1} \end{vmatrix} < 0 \quad \text{：極値でない}$$

となり、更に f_{xx} の符号によれば、$(x,y) = (0,0)$ では極小値（0）であり、また $(x,y) = (0,\pm 1)$ では極大値（$2\mathrm{e}^{-1}$）である事が分かります。

答え：$(x,y) = (0,0)$ で極小値 0、$(x,y) = (0,\pm 1)$ で極大値 $2\mathrm{e}^{-1}$

□

発展演習 41 $f(x,y)=x^{\log y}\,(x>0,y>0)$

【解答例】　与式を変形すると

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{\log x\log y}$$

ですから、まず１階の偏導関数は

$$f_x=\frac{\log y}{x}\mathrm{e}^{\log x\log y},\quad f_y=\frac{\log x}{y}\mathrm{e}^{\log x\log y}$$

です。従って $f_x=f_y=0$ となる点は連立方程式：

$$\log y=0,\quad \log x=0$$

を解けば求まりますが、これは簡単に解けて $(x,y)=(1,1)$ のみです。

更に２階の偏導関数を計算すれば

$$\begin{aligned}
f_{xx}&=\left\{-\frac{\log y}{x^2}+\left(\frac{\log y}{x}\right)^2\right\}\mathrm{e}^{\log x\log y}\\
f_{xx}(1,1)&=0\\
f_{xy}=f_{yx}&=\left(\frac{1}{xy}+\frac{\log x}{y}\right)\mathrm{e}^{\log x\log y}\\
f_{xy}(1,1)=f_{yx}(1,1)&=1\\
f_{yy}&=\left\{-\frac{\log x}{y^2}+\left(\frac{\log x}{y}\right)^2\right\}\mathrm{e}^{\log x\log y}\\
f_{yy}(1,1)&=0
\end{aligned}$$

ですから、f のヘシアン：

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{vmatrix}$$

の $(1,1)$ での値は $H(1,1)=-1<0$ となってこの点では極値ではない事が分かります。

従ってこの関数は極値をもちません。 □

発展演習 42 $f(x,y)=x^2-x\sin y-\cos^2 y$

【解答例】　まず１階の偏導関数は

$$f_x=2x-\sin y,\quad f_y=-x\cos y-2\cos y(-\sin y)=\cos y(-x+2\sin y)$$

ですから、$f_x=f_y=0$ となる点は連立方程式：

$$2x-\sin y=0,\quad \cos y(2\sin y-x)=0$$

の解になります。第２式から見て場合分けをして考えます。

$y=\frac{\pi}{2}+n\pi$ のとき、$\cos y=0$ であり第２式は満たされますが、第１式から

$$x=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\begin{cases}\frac{1}{2} & n\text{ が偶数のとき}\\ -\frac{1}{2} & n\text{ が奇数のとき}\end{cases}$$

が分かります。従ってまずこの場合の解として

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}+2n\pi\right),\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\right)\quad (n=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

が得られます。

また、$y\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ のときは、第２式から $x=2\sin y$ ですからこれを第１式に代入して $\sin y=0$ が得られます。このとき $x=0$ でもあります。従ってこの場合の解として

$$(x,y)=(0,n\pi)\quad (n=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

が得られます。

次に２階の偏導関数を計算すると

$$f_{xx}=2,\quad f_{xy}=f_{yx}=-\cos y,\quad f_{yy}=x\sin y+2\cos(2y)$$

ですので $f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$ を

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -\cos y\\ -\cos y & x\sin y+2\cos(2y)\end{vmatrix}$$

で定めれば各候補点での符号は

$$H\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}-2\end{vmatrix}<0$$

$$H\left(-\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\right)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}-2\end{vmatrix}<0$$

$$H(0,2n\pi)=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}>0$$

$$H(0,(2n+1)\pi)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}>0$$

ですから、実際に極値となるのは $(x,y)=(0,n\pi)$ のみです。更に $f_{xx}>0$ から判断すればこの極値は極小値であり、値は

$$f(0,n\pi)=-1$$

ですから、求める極値は点 $(0,n\pi)\,(n=0,\pm1,\pm2,\dots)$ での極小値 -1 です。 □