

5 2変数関数の極値問題

5.1 復習：1変数関数の極値の求めかた

F が十分に微分可能であれば2階微分までの計算で極値を求める事が出来ます：

事実 5.1 十分に微分可能な関数 $F(t)$ が極値をとる可能性があるのは $F'(t) = 0$ である点のみです。

事実 5.2 $F(t)$ が十分微分可能であって $F'(a) = 0$ であれば、

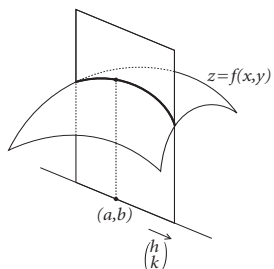
- (i) $F''(a) > 0$ ならば $F(t)$ は点 a で極小値
- (ii) $F''(a) < 0$ ならば $F(t)$ は点 a で極大値
- (iii) $F''(a) = 0$ の場合は（この方法では）不明

5.2 直線上での様子

（なめらかな）2変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で（狭義の）極値をとるかどうか調べるためには、この点 (a, b) の付近での関数 $f(x, y)$ の値の様子を調べる必要があります。

(a, b) の近くでの $f(x, y)$ の様子	点 (a, b) で極値であるか否か
常に $f(x, y) < f(a, b)$	極大値
常に $f(x, y) > f(a, b)$	極小値
$f(x, y)$ が $f(a, b)$ より大きい所も小さい所もある	極値ではない

2次元の広がりの中でこれをきちんと見るために、簡単のためにまずはこの点 (a, b) を通る直線を考えて、この直線上で $f(x, y)$ の値がどうなっているかを見てみましょう。レーダーがスキャンする様にこれを 360° やれば2次元全体を見ることが出来ます。



点 (a, b) を通りベクトル $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ に平行な直線を考え：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

この直線上での f の値を $F(t) = f(a + th, b + tk)$ とします。

5.2.1 1階微分の調査

点 (a, b) は $t = 0$ に対応するので $F'(0)$ を計算してみましょう。

$$F'(t) = f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \text{grad} f(a + th, b + tk)$$

$$F'(0) = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \text{grad} f(a, b)$$

もしも $f(x, y)$ が (a, b) で極大値であるならば、どんな直線上に制限してもその直線上でも極大値になっていなければなりません。極小値についても同様です（しかし逆は成り立ちません。360° どの直線上でも極大値になっていたとしても2変数の極大値とは限りません。どのような反例があるか想像出来ますか？）。

従って $f(x, y)$ が (a, b) で極値であるなら任意のベクトル $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ に対して $F'(0) = 0$ が成り立っているはずです。これは $\text{grad} f(a, b) = \mathbf{0}$ を意味します。

事実 5.3 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) において極値をとるなら $\text{grad} f(a, b) = \mathbf{0}$ である。

これは2変数関数のグラフ $z = f(x, y)$ を、 $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ としたときの $g(x, y, z) = 0$ が表す曲面と捉えた時に、そのグラディエントが $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である事を意味しており、接平面が『水平』ですから確かに極値である山の頂上か谷底のような所になっていることが窺えます。

5.2.2 2階微分の調査

$F'(x) = 0$ であるような点については $F(t)$ の2階微分を計算してみれば極大なのか極小なのかが分かります。

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k \\ F''(t) &= \{f_{xx}(a + th, b + tk)h + f_{xy}(a + th, b + tk)k\}h \\ &\quad + \{f_{yx}(a + th, b + tk)h + f_{yy}(a + th, b + tk)k\}k \\ &= f_{xx}(a + th, b + tk)h^2 + 2f_{xy}(a + th, b + tk)hk + f_{yy}(a + th, b + tk)k^2 \\ F''(0) &= f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2. \end{aligned}$$

このままでは分かりづらいので、 $k \neq 0$ として k^2 でくくってやれば

$$= k^2 \left\{ f_{xx}(a, b) \left(\frac{h}{k} \right)^2 + 2f_{xy}(a, b) \left(\frac{h}{k} \right) + f_{yy}(a, b) \right\}$$

であり、更に $\frac{h}{k} = P$ と置けば

$$= k^2 \{ f_{xx}(a, b)P^2 + 2f_{xy}(a, b)P + f_{yy}(a, b) \}$$

と書けますので、

$$Q(P) = f_{xx}(a, b)P^2 + 2f_{xy}(a, b)P + f_{yy}(a, b)$$

の符号について考えると、判別式 D を

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

として考えた場合（通常の 2 次方程式の判別式とは符号が逆かも知れませんが）判別式が負の場合、すなわち

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 < 0$$

の場合は $Q(P)$ のグラフは P 軸と 2 点で交わりますから $Q(P)$ の符号は P の値により正にも負にもなります。これは元々の関数 $f(x, y)$ を点 (a, b) を通る色々な直線上に制限して考えた時、どの方向の直線に制限するかによってその直線上で極大であったり極小であったり様々であることを意味しますから、そのような場合は元々の関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) では極値ではない事が分かります。

一方判別式が正の場合、すなわち

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0$$

の場合は $Q(P)$ のグラフは P 軸とは交わりませんから放物線は上半平面あるいは下半平面のどちらかに入っていることになります。上半平面に入っているなら当然任意の P に対して $Q(P) > 0$ ですし、下半平面なら $Q(P) < 0$ です。

このどちらであるかは放物線が上に凸か下に凸かで決まりますから 2 次の係数を見てやれば、 $f_{xx}(a, b) > 0$ なら下に凸で任意の P に対して $Q(P) > 0$ 従って極小値、 $f_{xx}(a, b) < 0$ なら上に凸で任意の P に対して $Q(P) < 0$ 従って極大値であることが分かります。

以上大雑把な説明でしたが、これをまとめると次のようになります。判別式にはヘシアンと言う名前が付けられています。 $f(x, y)$ は十分になめらか（偏微分可能など）であるとします。

定義 5.4 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して次で定まる関数 H_f :

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)f_{yx}(x, y)$$

を、関数 $f(x, y)$ のヘシアン（Hessian）と言う。

事実 5.5 $\text{grad}f(a, b) = \mathbf{0}$ であるなら、 $f(x, y)$ のヘシアンを $H_f(x, y)$ として

- (i) $H_f(a, b) > 0$ のとき f は点 (a, b) で極値であり、
 - (i -1) $f_{xx}(a, b) > 0$ ならばそれは極小値であり、
 - (i -2) $f_{xx}(a, b) < 0$ ならばそれは極大値である。
- (ii) $H_f(a, b) < 0$ のとき f は点 (a, b) で極値ではない。
- (iii) $H_f(a, b) = 0$ のときは（この方法では）不明である。

例題 5.6 [教科書 例題 7.1] 次の関数の極値を求めて下さい。

$$(1) f(x, y) = x^3 - 3axy + y^3 \quad (a > 0) \quad (2) f(x, y) = x^3 + y^2$$

(1) まず必要となる各種偏導関数を求めておきます。

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 - 3ay, & f_y(x, y) &= -3ax + 3y^2 \\ f_{xx}(x, y) &= 6x, & f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = -3a, & f_{yy}(x, y) &= 6y. \end{aligned}$$

すると $\text{grad}f(x, y) = \mathbf{0}$ となる点は連立方程式：

$$\begin{cases} 3x^2 - 3ay = 0 \\ 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$$

の解を求めれば良いのでこれを解きます。第1式から第2式を辺々引けば、

$$0 = 3(x^2 - y^2) + 3a(x - y) = (x - y)(x + y + a)$$

ですので、 $x - y$ が0 であるかどうかで分類して考えます。

$x - y = 0$ のとき : このとき連立方程式の2本の式は同一の式: $3x^2 - 3ax = 0$ なので結局 $x = 0, a$ である事が分かります (このときそれぞれ $y = 0, a$)。

$x - y \neq 0$ のとき : $x + y + a = 0$ から得られる $y = -x - a$ を第1式に代入すると

$$0 = 3x^2 - 3a(-x - a) = x^2 + ax + a^2$$

となりますが、この2次方程式は実数解を持ちません。

以上により $\text{grad}f(x, y) = \mathbf{0}$ となる点は2点 $(0, 0), (a, a)$ である事が分かりました。

最後にヘシアンによる判定ですが、関数 f のヘシアン H を次のように定めます：

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{vmatrix}.$$

点 $(0, 0)$ について：

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -3a \\ -3a & 0 \end{vmatrix} = -9a^2 < 0$$

この様にヘシアンが負なのでこの点では極値ではありません。

点 (a, a) について：

$$H(a, a) = \begin{vmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{vmatrix} = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0$$

この様にヘシアンが正なので関数 f は極値であり、また、 $f_{xx}(a, a) = 6a > 0$ によればそれは極小値である事が分かります。関数の値も求めておくと $f(a, a) = -a^3$ です。

以上により関数 f の極値は点 (a, a) での極小値 $-a^3$ のみである事が分かりました。

(2) 各種偏導関数を求めると

$$f_x(x, y) = 3x^2, \quad f_y(x, y) = 2y$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 2$$

なので $\text{grad}f(x, y) = \mathbf{0}$ となる点が原点のみである事は明らかです。

次にヘシアンによる判定ですが、関数 f のヘシアン H を

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

とすると

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

なので極値かどうかはヘシアンによる調査では判定出来ません。

そこで原点付近の様子を詳しく見てみましょう。例えば原点を通る直線 $y = 0$ のみに注目すると、この直線上では $f(x, y) = x^3$ であって、原点では0ですが、そのどんな近くにも値が正になる点も負になる点も両方存在しています。と言う事は原点で極大値あるいは極小値と言う事はあり得ません。

以上により関数 f は極値をもたない事が分かりました。 □

基本演習 1 教科書問題 7.1 次の関数の極値を求めて下さい。

(1) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y$

(2) $f(x, y) = x^2 + 4xy - 8y^2$

(3) $f(x, y) = x^3 - 5x^2 + 8x + y^2 + 2y$

課題 第2回

以下の問題を自分で考えて自筆にて解答してください。

課題 2.1 $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - xy^2 - yx^2 - xy$ の極値を求めてください。

課題 2.2 関数 $f(x, y) = \frac{x + y^2 - y}{1 + x^2}$ の極値をとる点 (候補ではなく、実際に極値をとる点です) を求めて下さい。

Exercise

+ 以下の問題は与えられた関数の極値を求める問題です +

【3 次関数の問題】

基本演習 2 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

基本演習 3 $f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 12xy$

基本演習 4 $f(x, y) = 4x^3 - y^3 + 3x^2y + 9y$

基本演習 5 $f(x, y) = 3x^2 + 2y^3 - 6xy - 3$

基本演習 6 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$

基本演習 7 $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6x + 1$

基本演習 8 $f(x, y) = x^3 - 12xy + 6y^2$

基本演習 9 $f(x, y) = 3x^2 + 2y^3 - 6xy$

基本演習 10 $f(x, y) = (x + y)^3 - 12xy$

基本演習 11 $f(x, y) = x^3 - 3x^2 - y^2$

基本演習 12 $f(x, y) = x^2 - 6x + 2xy^2 + 2y^2$

基本演習 13 $f(x, y) = \frac{y^2}{2} + xy - 3y - \frac{x^3}{3} + x^2 - x$

基本演習 14 $f(x, y) = x(1 - x^2 - y^2)$

基本演習 15 $f(x, y) = xy(3 - x - y)$

基本演習 16 $f(x, y) = xy(x + 2y - 6)$

【2 次関数の問題】

基本演習 17 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 6x + 4y + 2xy + 14$

基本演習 18 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y$

基本演習 19 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y$

基本演習 20 $f(x, y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$

基本演習 21 $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1$

基本演習 22 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$

基本演習 23 $f(x, y) = x^2 + 2\alpha xy + y^2$ (ただし $\alpha^2 \neq 1$)

【4 次関数その他】

基本演習 24 $f(x, y) = x^2 - 4x + y^4 - 8y^2$

基本演習 25 $f(x, y) = x^4 - 2xy - x^2 + y^2$

基本演習 26 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$

基本演習 27 $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$

基本演習 28 $f(x, y) = x^4(x - 2)^2 + y^2$

基本演習 29 $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$

基本演習 30 $f(x, y) = e^x(x^2 + y^2)$

【少し難しいもの】

発展演習 31 $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - xy^2 - 4xy$

発展演習 32 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 3x$

発展演習 33 $f(x, y) = 2x^2y + 2x^2 - 2xy + 3y^2 + 1$

発展演習 34 $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 - 3x^2$

発展演習 35 $f(x, y) = x^2y + xy^2 + y^3 - y$

発展演習 36 $f(x, y) = 2x^2 - 6x^2y + 2y^3$

発展演習 37 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$

発展演習 38 $f(x, y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 6y^2$

発展演習 39 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

発展演習 40 $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$

発展演習 41 $f(x, y) = x^{\log y} (x > 0, y > 0)$

発展演習 42 $f(x, y) = x^2 - x \sin y - \cos^2 y$