

6 幾何学的な最大・最小問題

三角形や立方体などの図形に関する最大値・最小値問題は多変数関数の条件付き極値問題ですが、Lagrange の未定乗数法を使った議論等によらなくても、AM-GM 不等式やその一般化である Maclaurin の不等式、Jensen の不等式を使えば簡単に答えが出せる場合があります。

6.1 AM-GM 不等式

定理 6.1 [AM-GM 不等式] $a_1, \dots, a_n$ がすべて正の実数であるとき

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

であり、等号は $a_1 = \dots = a_n$ のときのみ成り立ちます。

$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ は算術平均 (arithmetic mean = AM)、 $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ は幾何平均 (geometric mean = GM) と呼ばれます。 $n = 2$ の場合は次のように簡単に証明されます：

$$0 \leq (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}.$$

次に $n = 3$ を示したいところですが、これを直接示すのは難しいので先に $n = 4$ のときを示しておきます。 $n = 2$ のときの結果を使えば

$$\begin{aligned} \frac{a + b + c + d}{4} &= \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \\ &\geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \end{aligned}$$

であって等号は $a = b$ かつ $c = d$ の時に成り立っていますが、これは更に

$$\geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

となります。等号が成立するのは結局 $a = b, c = d, \sqrt{ab} = \sqrt{cd}$ のときですからこれは $a = b = c = d$ の時に他なりません。

いよいよ $n = 3$ の場合ですが、

$$\frac{a + b + c}{3} = \frac{a + b + c + \frac{a+b+c}{3}}{4}$$

である事に注意すれば、 $n = 4$ のときの結果から

$$\geq \sqrt[4]{abc \frac{a+b+c}{3}}$$

となりますが、これは

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{3} &\geq (abc)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \\ \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{\frac{3}{4}} &\geq (abc)^{\frac{1}{4}} \\ \frac{a+b+c}{3} &\geq (abc)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

を導きます。等号が成り立つのは $a = b = c = \frac{a+b+c}{3}$ のときになっています。

この方法を使えば一般の n の場合についても証明する事が出来ますが、いっそのこと全く別のやり方の方が簡単だったりします (後で紹介します)。

例題 6.2 周長が $2L$ の長方形の中で面積が最大のものを求めて下さい。

たて・よこを x, y とすれば、条件によって $x + y = L$ が分かりますから、算術平均と幾何平均の関係から

$$\frac{L}{2} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad \text{すなわち} \quad \frac{L^2}{4} \geq xy$$

が成り立ち、等号は $x = y$ のときのみ成立します。右辺は長方形の面積を表しますから、その等号のときが最大値である事が分かります。

以上から面積が最大になるのは、1 辺が $\frac{L}{2}$ の正方形のときです。□

例題 6.3 容積が 1440cm^3 の直方体の箱を作りたい。材料費は、一定面積あたり底面と側面が上面の 1.5 倍である。材料費を最も安くするにはどのように作れば良いですか。

底面の 2 辺を a, b 、高さを c とすると、材料費は単位面積辺り p 円として $p\left(\frac{5}{2}ab + 3bc + 3ca\right)$ です。

算術・幾何平均の関係から

$$p \left(\frac{5}{2}ab + 3bc + 3ca \right) \geq 3 \sqrt[3]{\frac{3^2 5}{2} p^3 (abc)^2} = 3p \sqrt[3]{\frac{1440^2 3^2 5}{2}}$$

であり、等号は $\frac{5}{2}ab = 3bc = 3ca$ の時に成り立ちます。

これは $a = b, c = \frac{5}{6}a$ を意味しますから、 $abc = 1440$ から $a^3 = 2^6 3^3$ すなわち $a = 12, b = 12, c = 10$ が得られます。

従って、底面が 1 辺 12 の正方形で高さが 10 の直方体にすれば材料費が最も低くなります。□

基本演習 1 [教科書例題 7.2] 直方体の 3 辺の長さの和が $3a$ であるとき、体積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 2 2 辺が x, y の長方形を底面とし、高さ z の柵を作ります。柵を作る材料は (総面積) $\times$ 10 円で購入出来るものとします。

材料費の予算が 1000 円と決められている時に、最も容積の大きな柵を作るには 3 辺をどのように決めたら良いでしょうか。ただし、材料の厚さや組んだ時の組み合わせ部分は考えないものとします。

6.2 Maclaurin の不等式

a_1, a_2, a_3 が正であるとき、AM-GM 不等式から

$$\frac{a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2}{3} \geq \sqrt[3]{a_2 a_3 \cdot a_1 a_3 \cdot a_1 a_2} = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3^2}$$

が成り立っています (等号は $a_1 = a_2 = a_3$ の時のみ成立)。

また、

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right)^2 - \frac{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1}{3} &= \frac{1}{9} \left\{ (a_1 + a_2 + a_3)^2 - 3(a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2) \right\} \\ &= \frac{1}{9} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_2 a_3 - a_1 a_3 - a_1 a_2) \\ &= \frac{1}{9} \left\{ \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix} \right| - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix} \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

であり、最後の不等号は 2 つのベクトルが平行である場合、すなわち $a_1 = a_2 = a_3$ である場合にのみ等号が成り立っています。最初の結果と合わせて次を得ます：

定理 6.4 [Maclaurin の不等式] a_1, a_2, a_3 がすべて正の実数であるとき

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt{\frac{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1}{3}} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

であり、等号は $a_1 = a_2 = a_3$ の時のみ成り立ちます。

例題 6.5 表面積が 6 であるような直方体は沢山ありますが、その中で 3 辺 (縦・横・高さ) の和が最小のものはどんなものでしょうか？

【解答例】直方体の 3 辺を x, y, z とします。すると Maclaurin の不等式から

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}}$$

が成り立ちますが (等号は $x = y = z$ の時のみ)、この直方体の表面積は $2(xy + yz + zx) = 6$ でしたから

$$x + y + z \geq 3$$

が分かります。従って 3 辺の和は $x = y = z = 1$ の時 (立方体) に最小となります。□

6.3 Jensen の不等式

関数 $f(x)$ がある点で $f''(x) > 0$ を満たす時、この点の近くで『下に凸である』と言いました。この『下に凸』は正確には

『グラフ上の任意の 2 点を結ぶ線分は、必ずグラフよりも上にある』

と云う風に記述され、数式で表現すると次のようになります：

定理 6.6 区間 I の内部（端点は問いません）で $f''(x) > 0$ ならば、区間 I の任意の a, b と $0 < t < 1$ に対して次式が成立し、等号は $a = b$ のときのみ成り立ちます：

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

また、 $t = 0, 1$ のときにも等号が成り立っていることにも注意します。

【証明】 区間内の任意の $b < a$ （端点がある場合は端点でも良い）と任意の $0 < t < 1$ に対して、平均値の定理から

$$\begin{aligned} & tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b) \\ &= t\{f(a) - f(ta + (1-t)b)\} + (1-t)\{f(b) - f(ta + (1-t)b)\} \\ &= t\{a - ta - (1-t)b\}f'(v) + (1-t)\{b - ta - (1-t)b\}f'(w) \end{aligned}$$

となる v が a と $ta + (1-t)b$ の間に、 w が b と $ta + (1-t)b$ の間に存在し、

$$tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b) = t(1-t)(a-b)\{f'(v) - f'(w)\}$$

となりますが、 $w < ta + (1-t)b < v$ である事と、区間 I の内部で $f''(x) > 0$ であれば、 $f'(x)$ が狭義単調増加であることから、

$$tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b) > 0$$

となります。 $a = b$ のときに等号が成立するのは自明です。

□

6.3.1 Jensen-Hölder の不等式

$f(x)$ が $f''(x) > 0$ を満たしているならば、3項の場合も同様に、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) &= f\left(\frac{2}{3}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}c\right) \\ &\leq \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(c) \\ &\leq \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right\} + \frac{1}{3}f(c) = \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \end{aligned}$$

が成り立っており、一般に次の事実が得られます（帰納法で証明出来る筈です）：

定理 6.7 [Jensen-Hölder の不等式、1889-1906] $f(x)$ が $f''(x) > 0$ であれば、任意の $a_1, \dots, a_n$ に対して

$$f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n}$$

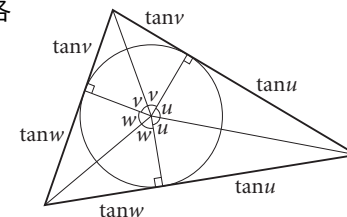
であり等号は $a_1 = \dots = a_n$ のときのみ成立します。

ここで $a_j > 0$ と仮定し、 $f(x) = -\log x$ を考えれば n 項の算術・幾何平均の関係式が得られます（演習問題参照）。

例題 6.8 定円に外接する三角形のうちで面積が最も小さいものを求めて下さい。

【解答例】簡単のため円の半径を 1 とし、左図の様に各角度 u, v, w を定めます。このとき外接 3 角形の面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\tan u + \tan v) + \frac{1}{2}(\tan v + \tan w) + \frac{1}{2}(\tan w + \tan u) \\ &= \tan u + \tan v + \tan w \end{aligned}$$



ですが、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で関数 $f(x) = \tan x$ は $f''(x) > 0$ を満たしていますので

$$\tan u + \tan v + \tan w = 3 \left(\frac{\tan u + \tan v + \tan w}{3} \right) \geq 3 \tan \frac{u + v + w}{3} = 3 \tan \frac{\pi}{3}$$

であって、等号は $u = v = w = \frac{\pi}{3}$ のときに成り立ちますが、これは面積の最小値を示しており、しかも正 3 角形に他なりません。

□

Exercise

基本演習 1 [教科書例題 7.2] 直方体の 3 辺の長さの和が $3a$ であるとき、体積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 2 2 辺が x, y の長方形を底面とし、高さ z の柵を作ります。柵を作る材料は (総面積) $\times 10$ 円で購入出来るものとします。

材料費の予算が 1000 円と決められている時に、最も容積の大きな柵を作るには 3 辺をどのように決めたら良いでしょうか。ただし、材料の厚さや組んだ時の組み合わせ部分は考えないものとします。

基本演習 3 周囲の長さが一定である長方形のうち面積が最大となるものを求めて下さい。

基本演習 4 体積が一定である直方体のうちで表面積が最小のものを求めて下さい。

基本演習 5 直方体の 3 辺の和が一定のとき表面積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 6 3 辺の和が一定である三角形のうち面積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 7 定円に内接する三角形のうちで面積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 8 定円に内接する四角形のうちで面積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 9 定円に外接する四角形のうちで面積が最小のものを求めて下さい。

基本演習 10 定円に内接する三角形のうちで周長が最長のものを求めて下さい。

基本演習 11 定円に外接する三角形のうちで周長が最短のものを求めて下さい。

基本演習 12 面積が 49 である長方形の中で周長が最小のものを求めて下さい。

基本演習 13 表面積が 54 である直方体の中で体積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 14 $f''(x) > 0$ であるとします。一般に正の数 p, q, r が $p + q + r = 1$ を満たすとき、定理 6.6 を使って

$$f(pa + qb + rc) \leq pf(a) + qf(b) + rf(c)$$

が成り立つ事を示して下さい。

基本演習 15 Jensen-Hölder の不等式を使って、AM-GM 不等式を証明して下さい。

発展演習 16 [AM-GM 不等式の別証明]

(1) 全ての实数 x に対して $e^x \leq e^x$ である事を示して下さい。

(2) 正の数 $x_1, \dots, x_n$ が $x_1 + \dots + x_n = n$ をみたすとき、 $x_1 \cdots x_n \leq 1$ が成立する事を示して下さい。

(3) 正の数 $y_1, \dots, y_n$ に対して $Y = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$ とするとき、 $y_1 \cdots y_n \leq Y^n$ が成立する事を示して下さい。

(4) このやり方で等号の成立条件まで導き出す事は出来ますか？

発展演習 17 任意の実数 a, b, c に対して、算術平均と 2 乗平均の関係：

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

が成り立ち、等号は $a = b = c$ で全て非負の時のみ成立する事を証明して下さい。

発展演習 18 正の数 $b_0 \leq a_0$ に対して、それらの算術平均と幾何平均をとったものを新たに a_1, b_1 としてこれを繰り返して得られる数列を考えます：

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

(1) 次の関係式を証明して下さい：

$$b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a_1 \leq a_0.$$

(2) 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が同じ値に収束する事を示して下さい。この値の事を元の正数 a_0, b_0 の算術幾何平均 (Arithmetic-Geometric Mean) と言って、記号 $AGM(a_0, b_0)$ で表します。

発展演習 19* 任意の正数 $a, b > 0$ と正の整数 n に対して

$$M_n = \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$$

と定義するとき以下の問いに答えてください。

(1) $M_1 \leq M_2$ を示して下さい。

(2) $M_2 \leq M_3$ を示して下さい。

(3) $M_1 \leq M_n$ を示して下さい。

(4) $M_n \leq M_{n+1}$ を示して下さい。

Exercise 解答例

基本演習 1 [教科書例題 7.2] 直方体の 3 辺の長さの和が $3a$ であるとき、体積が最大のを求めて下さい。

直方体の 3 辺の長さをそれぞれ x, y, z とした時、これらはいずれも正ですから算術平均と幾何平均の関係から

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

が成り立っています。ここで等号は $x=y=z$ の時にのみ成り立ちます。

すると条件から左辺は a であり、両辺 3 乗すれば

$$a^3 \geq xyz = V$$

ですから、体積 V は $x=y=z=a$ のとき最大値 a^3 となります。これは立方体のケースです。□

基本演習 2 2 辺が x, y の長方形を底面とし、高さ z の柵を作ります。柵を作る材料は (総面積) $\times 10$ 円で購入出来るものとします。

材料費の予算が 1000 円と決められている時に、最も容積の大きな柵を作るには 3 辺をどのように決めたら良いでしょうか。ただし、材料の厚さや組んだ時の組み合わせ部分は考えないものとします。

【解答例】 総面積は底面と側面を合わせて $xy + 2(yz + zx)$ ですから、材料費は $10xy + 20(yz + zx)$ になります。これが 1000 だとすると、算術・幾何平均の関係式から

$$\begin{aligned} \frac{xy + 2yz + 2zx}{3} &\geq \sqrt[3]{xy \cdot 2yz \cdot 2zx} \\ \frac{100}{3} &\geq \sqrt[3]{4x^2y^2z^2} \\ \frac{100^3}{3^3} &\geq 4V^2 \\ \frac{500}{3\sqrt{3}} &\geq V \end{aligned}$$

となり、等号は $xy = 2yz = 2zx$ の時に成立します。この連立方程式を変形すれば、 $x = 2z, y = x, y = 2z$ ですから、 $4z^3 = \frac{500}{3\sqrt{3}}$ より、 $z = \frac{5}{\sqrt{3}}, x = y = \frac{10}{\sqrt{3}}$ とすれば良い事が分かります。□

基本演習 3 周囲の長さが一定である長方形のうち面積が最大となるものはどんな長方形ですか。

【解答例その 1 算術・幾何平均】 2 辺の長さを x, y とすれば、周囲の長さは $2x + 2y$ であり、面積は xy である。

今、周囲の長さが $2S$ であったとすると、算術平均と幾何平均の大小関係式により、

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy} \\ \frac{S}{2} &\geq \sqrt{xy} \\ \frac{S^2}{4} &\geq xy \end{aligned}$$

であり、等号は $x = y$ の時に成り立つ。従って求める最大値は正方形の場合の $\frac{S^2}{4}$ である。

【解答例その 2 摂動法】 周囲の長さが一定値 $4S$ であるような正方形ではない長方形を考える。縦・横ともに S より長い場合や、縦・横ともに S より短い場合は存在しないので、縦・横のうち長い方を $S + \alpha$ 、短い方を $S - \alpha$ と置く事が出来る ($\alpha > 0$)。

この長方形の面積は $(S + \alpha)(S - \alpha)$ となるが、これと正方形の場合の面積の差を見ると

$$(S + \alpha)(S - \alpha) - S^2 = -\alpha^2 < 0$$

であり、長方形の面積は正方形の場合より小さい。よって正方形の場合が面積最大である。

【解答例その 3 1 変数に帰着】 周長 $2S$ の長方形の縦・横の長さは $x, S - x$ であるから、 $0 < x < S$ の範囲で面積 $x(S - x)$ の最大値を考える。

すると、

$$x(S - x) = -x^2 + Sx = -\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 + \frac{S^2}{4}$$

より明らかにその最大値は $x = \frac{S}{2}$ の時の $\frac{S^2}{4}$ であり、これは正方形の場合に相当する。□

基本演習 4 体積が一定である直方体のうちで表面積が最小のものはどんな直方体ですか。

【解答例】 3 辺を a, b, c とすると、表面積は $2ab + 2bc + 2ca$ であり、体積は abc です。体積の一定値を V とします。

このとき算術・幾何平均の関係から

$$\frac{2ab + 2bc + 2ca}{3} \geq \sqrt[3]{8(abc)^2}$$

$$2ab + 2bc + 2ca \geq 6\sqrt[3]{V^2}$$

であり、等号は $ab = bc = ca$ すなわち $a = b = c$ の時に成り立ちます。

従って表面積が最小と成るのは立方体の時です。□

基本演習 5 直方体の 3 辺の和が一定のとき表面積が最大となるものはどんな直方体ですか。

【解答例】 直方体の縦・横・高さをそれぞれ x, y, z とし、 $x + y + z = L$ とすると表面積は

$$2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = L^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

なので、表面積の最大値を求める事は $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値を求める事と同値である。

3 辺の長さの和が一定であるという条件式： $x + y + z = L$ は平面の方程式であり、結局問題はこの平面上の $0 < x, y, z$ の部分に乗っている点で原点に最も近い点を求める問題に帰着されるが、この平面の法線ベクトルは ${}^t(1 \ 1 \ 1)$ であるから、直線 $x = y = z$ と平面 $x + y + z = L$ の交点が求める点であって、それは点 $(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}, \frac{L}{3})$ である。以上により、表面積が最大となるのは立方体の場合である。

あれ？算術・幾何平均は使いませんね。□

基本演習 6 3 辺の和が一定である 3 角形のうち面積が最大のものを求めて下さい。

【解答例】 3 辺を x, y, z 、その和を $2L = x + y + z$ とすると、ヘロンの公式から面積は

$$\sqrt{L(L-x)(L-y)(L-z)}$$

なので、この 2 乗をとって $L(L-x)(L-y)(L-z)$ の最大値を求める事にします。すると、算術・幾何平均の関係から、

$$\frac{(L-x) + (L-y) + (L-z)}{3} \geq \sqrt[3]{(L-x)(L-y)(L-z)}$$

$$L\left(\frac{L}{3}\right)^3 \geq L(L-x)(L-y)(L-z)$$

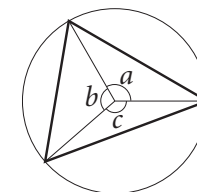
であって、等号は $L-x = L-y = L-z$ すなわち $x = y = z$ の時に成り立ちますから、求める最大値は正 3 角形の時に達成される事が分かります。□

基本演習 7 定円に内接する三角形のうちで面積が最大のものを求めて下さい。

【解答例】簡単のため円の半径を 1 として、右図の様に各角度 a, b, c を定めます：このとき内接 3 角形の面積は

$$\frac{1}{2} \sin a + \frac{1}{2} \sin b + \frac{1}{2} \sin c$$

となっています。



これは図のような鋭角 3 角形の場合のみならず a, b, c のいずれかが π を越える場合でも成り立っています。

まずは a, b, c がいずれも π を越えない場合について考えます。 $f(x) = -\sin x$ は $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で $f''(x) > 0$ (狭義凸) ですから、

$$\frac{-\sin a - \sin b - \sin c}{3} \geq -\sin \frac{a+b+c}{3}$$

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c}{2} \leq \frac{3}{2} \sin \frac{2\pi}{3}$$

であって等号は $a = b = c$ のときのみに成立します。従って円に内接する 3 角形であって a, b, c がいずれも π を越えないものの中で面積が最大のものは正 3 角形のみであって、その時の面積は $\frac{3}{2} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$ です。

次に a, b, c のうちいずれか (あっても一つですが) が π を越えている場合についてみましょう。 $\pi < c$ と仮定すると $\sin c < 0$ ですから、

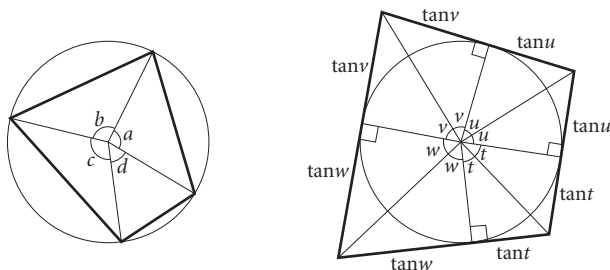
$$\frac{1}{2} \sin a + \frac{1}{2} \sin b + \frac{1}{2} \sin c \leq \frac{1}{2} (\sin a + \sin b) \leq 1$$

となってこの場合の面積は 1 より小さい事が分かります。

以上から、全ての内接3三角形のうちで面積が最も大きいのは正3三角形である事が分りました。 $\square$

基本演習 8 定円に内接する四角形のうちで面積が最大のものを求めて下さい。

【解答例】 下図左の角度を a, b, c, d とすれば、内接四角形の面積は、 a, b, c, d のうちいずれか (あっても一つですが) が π を越える場合も $\frac{1}{2}(\sin a + \sin b + \sin c + \sin d)$ で与えられます。しかし、 $\sin x \leq 1$ によれば、 $\sin a = \sin b = \sin c = \sin d = 1$ のとき、すなわち $a = b = c = d = \frac{\pi}{2}$ のときに限って最大値 2 となる事は明らかです。従って面積が最大となるのは正方形です。ははは。Jensen の不等式は使わなくても出来てしまいますね。



$\square$

基本演習 9 定円に外接する四角形のうちで面積が最小のものを求めて下さい。

【解答例】 上図右の角度を t, u, v, w とします。いずれも $\frac{\pi}{2}$ を越えない事に注意しておきます。すると外接四角形の面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ (\tan t + \tan u) + (\tan u + \tan v) + (\tan v + \tan w) + (\tan w + \tan t) \} \\ &= \tan t + \tan u + \tan v + \tan w \end{aligned}$$

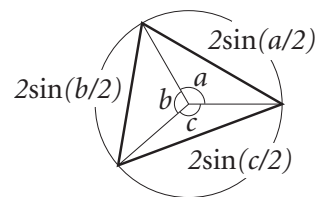
ですが、 $f(x) = \tan x$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で $f''(x) > 0$ (狭義凸) ですから

$$\begin{aligned} \tan t + \tan u + \tan v + \tan w &\geq 4 \tan \frac{t+u+v+w}{4} \\ &= 4 \tan \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

であり、等号は $t = u = v = w = \frac{\pi}{4}$ のとき、即ち正方形の時に成り立ちます。従って面積が最小なのは正方形の場合です。 $\square$

基本演習 10 定円に内接する三角形のうちで周長が最長のものを求めて下さい。

【解答例】



簡単のため円の半径は 1 とし左図の様に角度 a, b, c をとれば、それらのうちのいずれかが π を越えた場合も各辺の長さは $2 \sin \frac{a}{2}, 2 \sin \frac{b}{2}, 2 \sin \frac{c}{2}$ となりますので、3 辺の長さの和は

$$2 \left(\sin \frac{a}{2} + \sin \frac{b}{2} + \sin \frac{c}{2} \right)$$

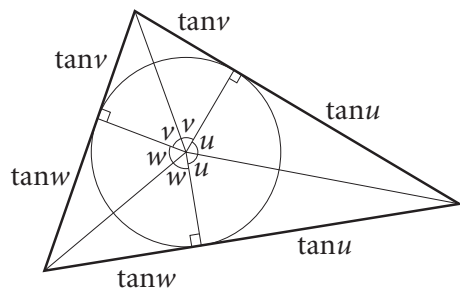
で与えられます。ここで $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ はいずれも π を越えませんが、 $f(x) = -\sin x$ が $0 < x < \pi$ の範囲で $f''(x) > 0$ (狭義凸) であることから、

$$\begin{aligned} -\sin \frac{a}{2} - \sin \frac{b}{2} - \sin \frac{c}{2} &\geq -3 \sin \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}}{3} \\ 2 \left(\sin \frac{a}{2} + \sin \frac{b}{2} + \sin \frac{c}{2} \right) &\leq 6 \sin \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

が成り立ちます。等号は $a = b = c = \frac{2\pi}{3}$ のとき、すなわち正3三角形の時に成り立ちますから、3 辺の長さの和が最大となるのは正3三角形の場合である事が分かります。 $\square$

基本演習 11 定円に外接する三角形のうちで周長が最短のものを求めて下さい。

【解答例】



簡単のため円の半径を 1 として上図の様に角度 u, v, w をとれば、3 辺の長さはそれぞれ $\tan u + \tan v, \tan v + \tan w, \tan w + \tan u$ ですから、3 辺の長さの和は

$$2(\tan u + \tan v + \tan w)$$

で与えられます。 u, v, w はいずれも $\frac{\pi}{2}$ を越えませんから、 $f(x) = \tan x$ が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $f''(x) > 0$ (狭義凸) である事によれば

$$\tan u + \tan v + \tan w \geq 3 \tan \frac{u+v+w}{3}$$

$$2(\tan u + \tan v + \tan w) \geq 6 \tan \frac{\pi}{3}$$

であり、等号は $u = v = w = \frac{\pi}{3}$ のとき、即ち正三角形の時に成り立ちます。従って 3 辺の長さの和が最小なのは正三角形の場合です。□

基本演習 12 面積が 49 である長方形の中で周長が最小のものを求めて下さい。

【解答例】長方形の 2 辺を $a, b > 0$ とすれば周長は $2(a+b)$ であり、AM-GM 不等式から

$$2(a+b) = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \geq 4\sqrt{ab} = 28$$

であり、等号は $a = b$ のとき成り立ちます。従って周長 $2a + 2b$ が最小となるのは 1 辺が 7 の正方形の場合です。□

基本演習 13 表面積が 54 である直方体の中で体積が最大のものを求めて下さい。

【解答例】直方体の 3 辺を $a, b, c > 0$ と置くと、体積は abc であり、また表面積が 54 であることから $2(ab + bc + ca) = 54$ が分かります。このとき Maclaurin の不等式から

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}$$

$$3 \geq \sqrt[3]{abc}$$

が分かります (等号は $a = b = c$ のときのみ成り立つ)。従って体積は立方体のときに最大値 27 となりますから、体積が最大となるのは 1 辺が 3 の立方体です。□

基本演習 14 $f''(x) > 0$ であるとします。一般に正の数 p, q, r が $p + q + r = 1$ を満たすとき、定理 3.1 を使って

$$f(pa + qb + rc) \leq pf(a) + qf(b) + rf(c)$$

が成り立つ事を示してください。

【解答例】

$$pa + qb + rc = pa + (1-p) \left\{ \frac{q}{1-p}b + \frac{r}{1-p}c \right\}$$

なので、 $d = \left\{ \frac{q}{1-p}b + \frac{r}{1-p}c \right\}$ と置けば定理から

$$f(pa + qb + rc) = f(pa + (1-p)d) \leq pf(a) + (1-p)f(d)$$

が成り立ちます (等号は $a = d$ のとき成立)。

また、

$$\frac{q}{1-p} + \frac{r}{1-p} = \frac{q+r}{1-p} = 1$$

であることに注意すれば、やはり定理から

$$f(d) \leq \frac{q}{1-p}f(b) + \frac{r}{1-p}f(c)$$

が成り立ちます (等号は $b = c$ のとき成立) から、先の結果と合わせて

$$f(pa + qb + rc) \leq pf(a) + qf(b) + rf(c)$$

が成り立ちます。等号は上の 2 条件を合わせて $a = b = c$ のときのみ成立します。□

基本演習 15 Jensen-Hölder の不等式を使って、AM-GM 不等式を証明してください。

【解答例】 $a_1, \dots, a_n$ を正の実数とします。 $f(x) = -\log x$ は $f''(x) > 0$ を満たしていますから、Jensen-Hölder の不等式から

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) &\leq \frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n} \\ -\log \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} &\leq \frac{-\log a_1 - \dots - \log a_n}{n} \\ \log \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} &\geq \log \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \end{aligned}$$

が得られます (等号は $a_1 = \dots = a_n$ のときのみ成立)。 $\log x$ は単調増加関数ですからこれは

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

を意味します。

□

発展演習 16 [AM-GM 不等式の別証明]

(1) 全ての实数 x に対して $e x \leq e^x$ である事を示して下さい。

(2) 正の数 $x_1, \dots, x_n$ が $x_1 + \dots + x_n = n$ をみたすとき、 $x_1 \cdots x_n \leq 1$ が成立する事を示して下さい。

(3) 正の数 $y_1, \dots, y_n$ に対して $Y = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$ とするとき、 $y_1 \cdots y_n \leq Y^n$ が成立する事を示して下さい。

(4) このやり方で等号の成立条件まで導き出す事は出来ますか？

いずれももの凄く簡単に証明出来ますね。(3) が言っている事は算術・幾何平均の関係式に他なりません。

発展演習 17 任意の実数 a, b, c に対して、算術平均と 2 乗平均の関係：

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

が成り立ち、等号は $a = b = c$ で全て非負の時のみ成立する事を証明して下さい。

【解答例】 $f(x) = x^2$ とするとこれは常に $f''(x) > 0$ を満たしていますから狭義凸です。従って Jensen の不等式から任意の実数 a, b, c に対して

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3}$$

が成り立ち、等号は $a = b = c$ の時のみ成立しています。これは具体的には

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 &\leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \\ \left|\frac{a+b+c}{3}\right| &\leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \end{aligned}$$

を意味しますから題意が得られました。

□

発展演習 18 正の数 $b_0 \leq a_0$ に対して、それらの算術平均と幾何平均をとったものを新たに a_1, b_1 としてこれを繰り返して得られる数列を考えます：

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

(1) 次の関係式を証明して下さい：

$$b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a_1 \leq a_0.$$

(2) 2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が同じ値に収束する事を示して下さい。この値の事を元の正数 a_0, b_0 の算術幾何平均 (Arithmetic-Geometric Mean) と言って、記号 $AGM(a_0, b_0)$ で表します。

【解答例】(1) 算術平均と幾何平均の関係から常に $b_n \leq a_n$ が成り立っています。また、

$$b_n = \sqrt{b_n^2} \leq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{2a_n}{2} = a_n$$

でもありますから題意が得られます。

(2) ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

とすると、漸化式から $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\beta = \sqrt{\alpha\beta}$ が成り立っているので $\alpha = \beta$ が分かります。従って2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は同じ値に収束します。 $\square$

発展演習 19 任意の正数 $a, b > 0$ と正の整数 n に対して

$$M_n = \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$$

と定義するとき以下の問いに教えてください。

- (1) $M_1 \leq M_2$ を示してください。
- (2) $M_2 \leq M_3$ を示してください。
- (3) $M_1 \leq M_n$ を示してください。
- (4) $M_n \leq M_{n+1}$ を示してください。

【解答例】(1)

$$M_2^2 - M_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

(2)

$$\begin{aligned} M_3^6 - M_2^6 &= \left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\{2(a^3 + b^3)^2 - (a^2 + b^2)^3\} \\ &= \frac{1}{8}(a^6 - 3a^4b^2 + 4a^3b^3 - 3a^2b^4 + b^6) \\ &= \frac{1}{8}(a-b)^2(a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} M_1 \leq M_n &\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2} \\ &\Leftrightarrow 2(a+b)^n \leq 2^n(a^n + b^n) \\ &\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + 1\right)^n \leq 2^n\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right\} \end{aligned}$$

なので、

$$A_n(x) = 2^n(x^n + 1) - 2(x+1)^n$$

と置いて $x > 0$ で $A_n(x) \geq 0$ であることを示します。

$$A'_n(x) = 2^n \cdot nx^{n-1} - 2n(x+1)^{n-1} = 2n\{(2x)^{n-1} - (x+1)^{n-1}\}$$

なので、 $x > 0$ では $A'_n(x) = 0$ となるのは $2x = x+1$ となるとき、すなわち、 $x = 1$ の時のみです。

x	0	...	1	...
$A_n(x)$	$2^n - 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$
$A'_n(x)$	$-2n$	$-$	0	$+$

増減表によれば、 $x > 0$ では $A_n(x) \geq 0$ であり、等号は $x = 1$ のときにのみ成立します。

以上から題意の事実が成立し、等号は $a = b$ のときにのみ成立します。

(4)

$$A(x) = \frac{(x^{n+1} + 1)^n}{(x^n + 1)^{n+1}}$$

と置けば

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{n(x^{n+1} + 1)^{n-1}(n+1)x^n(x^n + 1)^{n+1} - (x^{n+1} + 1)^n(n+1)(x^n + 1)^n nx^{n-1}}{(x^n + 1)^{2n+2}} \\ &= \frac{n(n+1)(x^{n+1} + 1)^{n-1}x^{n-1}\{x(x^n + 1) - (x^{n+1} + 1)\}}{(x^n + 1)^{n+2}} \\ &= \frac{n(n+1)(x^{n+1} + 1)^{n-1}x^{n-1}(x-1)}{(x^n + 1)^{n+2}} \end{aligned}$$

ですから、 $A'(x) = 0$ となる $x > 0$ は $x = 1$ のみであって、増減表は

x	0	...	1	...
$A'(x)$		$-$	0	$+$
$A(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$

となり、 $x > 0$ のとき $A_n(x) \geq \frac{1}{2}$ であることが分かります。これはすなわち

$$2(x^{n+1} + 1)^n - (x^n + 1)^{n+1} \geq 0$$

を意味し、従って $\{M_n\}$ の単調増加性が分かります。 $\square$