

6 幾何学的な最大・最小問題

三角形や立方体などの図形に関する最大値・最小値問題は多変数関数の条件付き極値問題ですが、Lagrange の未定乗数法を使った議論等によらなくても、AM-GM 不等式やその一般化である Maclaurin の不等式、Jensen の不等式を使えば簡単に答えが出せる場合があります。

6.1 AM-GM 不等式

定理 6.1 [AM-GM 不等式] $a_1, \dots, a_n$ がすべて正の実数であるとき

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

であり、等号は $a_1 = \dots = a_n$ のときのみ成り立ちます。

$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ は算術平均 (arithmetic mean = AM)、 $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ は幾何平均 (geometric mean = GM) と呼ばれます。 $n = 2$ の場合は次のように簡単に証明されます：

$$0 \leq (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}.$$

しかし一般の場合の証明は、知らないといけないでしょう (後で紹介します)。

例題 6.2 周長が $2L$ の長方形の中で面積が最大のものを求めて下さい。

たて・よこを x, y とすれば、条件によって $x + y = L$ が分かりますから、算術平均と幾何平均の関係から

$$\frac{L}{2} = \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad \text{すなわち} \quad \frac{L^2}{4} \geq xy$$

が成り立ち、等号は $x = y$ のときのみ成立します。右辺は長方形の面積を表しますから、その等号のときが最大値である事が分かります。

以上から面積が最大になるのは、1 辺が $\frac{L}{2}$ の正方形のときです。 $\square$

例題 6.3 容積が 1440cm^3 の直方体の箱を作りたい。材料費は、一定面積あたり底面と側面が上面の 1.5 倍である。材料費を最も安くするにはどのように作れば良いですか。

底面の 2 辺を a, b 、高さを c とすると、材料費は単位面積辺り p 円として $p\left(\frac{5}{2}ab + 3bc + 3ca\right)$ です。

算術・幾何平均の関係から

$$p\left(\frac{5}{2}ab + 3bc + 3ca\right) \geq 3\sqrt[3]{\frac{3^2 5}{2} p^3 (abc)^2} = 3p\sqrt[3]{\frac{1440^2 3^2 5}{2}}$$

であり、等号は $\frac{5}{2}ab = 3bc = 3ca$ の時に成り立ちます。

これは $a = b, c = \frac{5}{6}a$ を意味しますから、 $abc = 1440$ から $a^3 = 2^6 3^3$ すなわち $a = 12, b = 12, c = 10$ が得られます。

従って、底面が 1 辺 12 の正方形で高さが 10 の直方体にすれば材料費が最も低くなります。 $\square$

基本演習 1 [教科書例題 7.2] 直方体の 3 辺の長さの和が $3a$ であるとき、体積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 2 2 辺が x, y の長方形を底面とし、高さ z の柵を作ります。柵を作る材料は (総面積) $\times 10$ 円で購入出来るものとします。

材料費の予算が 1000 円と決められている時に、最も容積の大きな柵を作るには 3 辺をどのように決めたら良いでしょうか。ただし、材料の厚さや組んだ時の組み合わせ部分は考えないものとします。

6.2 Maclaurin の不等式

a_1, a_2, a_3 が正であるとき、AM-GM 不等式から

$$\frac{a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2}{3} \geq \sqrt[3]{a_2 a_3 \cdot a_1 a_3 \cdot a_1 a_2} = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}^2$$

が成り立っています (等号は $a_1 = a_2 = a_3$ のときのみ成立)。

また、

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^2 - \frac{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1}{3} &= \frac{1}{9} \{(a_1 + a_2 + a_3)^2 - 3(a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2)\} \\ &= \frac{1}{9} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_2 a_3 - a_1 a_3 - a_1 a_2) \\ &= \frac{1}{9} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\|^2 - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix} \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

であり、最後の不等号は2つのベクトルが平行である場合、すなわち $a_1 = a_2 = a_3$ である場合にのみ等号が成り立っています。最初の結果と合わせて次を得ます：

定理 6.4 [Maclaurin の不等式] a_1, a_2, a_3 がすべて正の実数であるとき

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt{\frac{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1}{3}} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

であり、等号は $a_1 = a_2 = a_3$ のときのみ成り立ちます。

例題 6.5 表面積が6であるような直方体は沢山ありますが、その中で3辺（縦・横・高さ）の和が最小のものはどんなもののでしょうか？

【解答例】 直方体の3辺を x, y, z とします。すると Maclaurin の不等式から

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}}$$

が成り立ちますが（等号は $x = y = z$ のときのみ）、この直方体の表面積は $2(xy + yz + zx) = 6$ でしたから

$$x + y + z \geq 3$$

が分かります。従って3辺の和は $x = y = z = 1$ の時（立方体）に最小となります。□

6.3 Jensen の不等式

関数 $f(x)$ がある点で $f''(x) > 0$ を満たす時、この点の近くで『下に凸である』と言いました。この『下に凸』は正確には

『グラフ上の任意の2点を結ぶ線分は、必ずグラフよりも上にある』

と云う風に記述され、数式で表現すると次のようになります：

定理 6.6 区間 I の内部（端点は問いません）で $f''(x) > 0$ ならば、区間 I の任意の a, b と $0 < t < 1$ に対して次式が成立し、等号は $a = b$ のときのみ成り立ちます：

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

また、 $t = 0, 1$ のときにも等号が成り立っていることにも注意します。

【証明】 区間内の任意の $b < a$ （端点がある場合は端点でも良い）と任意の $0 < t < 1$ に対して、平均値の定理から

$$\begin{aligned} &tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b) \\ &= t\{f(a) - f(ta + (1-t)b)\} + (1-t)\{f(b) - f(ta + (1-t)b)\} \\ &= t\{a - ta - (1-t)b\}f'(v) + (1-t)\{b - ta - (1-t)b\}f'(w) \end{aligned}$$

となる v が a と $ta + (1-t)b$ の間に、 w が b と $ta + (1-t)b$ の間に存在し、

$$tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b) = t(1-t)(a-b)\{f'(v) - f'(w)\}$$

となりますが、 $w < ta + (1-t)b < v$ である事と、区間 I の内部で $f''(x) > 0$ であれば、 $f'(x)$ が狭義単調増加であることから、

$$tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b) > 0$$

となります。 $a = b$ のときに等号が成立するのは自明です。□

6.3.1 Jensen-Hölder の不等式

$f(x)$ が $f''(x) > 0$ を満たしているならば、3項の場合も同様に、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) &= f\left(\frac{2}{3}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}c\right) \\ &\leq \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(c) \\ &\leq \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right\} + \frac{1}{3}f(c) = \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \end{aligned}$$

が成り立っており、一般に次の事実が得られます（帰納法で証明出来る筈です）：

定理 6.7 [Jensen-Hölder の不等式、1889-1906] $f(x)$ が $f''(x) > 0$ であれば、任意の $a_1, \dots, a_n$ に対して

$$f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n}$$

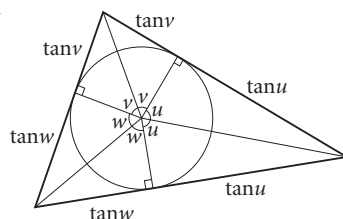
であり等号は $a_1 = \dots = a_n$ のときのみ成立します。

ここで $a_j > 0$ と仮定し、 $f(x) = -\log x$ を考えれば n 項の算術・幾何平均の関係式が得られます（演習問題参照）。

例題 6.8 定円に外接する三角形のうちで面積が最も小さいものを求めて下さい。

【解答例】簡単のため円の半径を 1 とし、左図の様に各角度 u, v, w を定めます。このとき外接 3 角形の面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\tan u + \tan v) + \frac{1}{2}(\tan v + \tan w) + \frac{1}{2}(\tan w + \tan u) \\ &= \tan u + \tan v + \tan w \end{aligned}$$



ですが、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で関数 $f(x) = \tan x$ は $f''(x) > 0$ を満たしていますので

$$\tan u + \tan v + \tan w = 3 \left(\frac{\tan u + \tan v + \tan w}{3} \right) \geq 3 \tan \frac{u + v + w}{3} = 3 \tan \frac{\pi}{3}$$

であって、等号は $u = v = w = \frac{\pi}{3}$ のときに成り立ちますが、これは面積の最小値を示しており、しかも正 3 角形に他なりません。□

Exercise

基本演習 1 [教科書例題 7.2] 直方体の 3 辺の長さの和が $3a$ であるとき、体積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 2 2 辺が x, y の長方形を底面とし、高さ z の柵を作ります。柵を作る材料は (総面積) $\times 10$ 円で購入出来るものとします。

材料費の予算が 1000 円と決められている時に、最も容積の大きな柵を作るには 3 辺をどのように決めたら良いでしょうか。ただし、材料の厚さや組んだ時の組み合わせ部分は考えないものとします。

基本演習 3 周囲の長さが一定である長方形のうち面積が最大となるものを求めて下さい。

基本演習 4 体積が一定である直方体のうちで表面積が最小のものを求めて下さい。

基本演習 5 直方体の 3 辺の和が一定のとき表面積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 6 3 辺の和が一定である三角形のうち面積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 7 定円に内接する三角形のうちで面積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 8 定円に内接する四角形のうちで面積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 9 定円に外接する四角形のうちで面積が最小のものを求めて下さい。

基本演習 10 定円に内接する三角形のうちで周長が最長のものを求めて下さい。

基本演習 11 定円に外接する三角形のうちで周長が最短のものを求めて下さい。

基本演習 12 面積が 49 である長方形の中で周長が最小のものを求めて下さい。

基本演習 13 表面積が 54 である直方体の中で体積が最大のものを求めて下さい。

基本演習 14 $f''(x) > 0$ であるとします。一般に正の数 p, q, r が $p + q + r = 1$ を満たすとき、定理 6.6 を使って

$$f(pa + qb + rc) \leq pf(a) + qf(b) + rf(c)$$

が成り立つ事を示して下さい。

基本演習 15 Jensen-Hölder の不等式を使って、AM-GM 不等式を証明して下さい。

発展演習 16 [AM-GM 不等式の別証明]

(1) 全ての实数 x に対して $e^x \leq e^x$ である事を示して下さい。

(2) 正の数 $x_1, \dots, x_n$ が $x_1 + \dots + x_n = n$ をみたすとき、 $x_1 \cdots x_n \leq 1$ が成立する事を示して下さい。

(3) 正の数 $y_1, \dots, y_n$ に対して $Y = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$ とするとき、 $y_1 \cdots y_n \leq Y^n$ が成立する事を示して下さい。

(4) このやり方で等号の成立条件まで導き出す事は出来ますか？

発展演習 17 任意の実数 a, b, c に対して、算術平均と 2 乗平均の関係：

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

が成り立ち、等号は $a = b = c$ で全て非負の時のみ成立する事を証明して下さい。

発展演習 18 正の数 $b_0 \leq a_0$ に対して、それらの算術平均と幾何平均をとったものを新たに a_1, b_1 としてこれを繰り返して得られる数列を考えます：

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

(1) 次の関係式を証明して下さい：

$$b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a_1 \leq a_0.$$

(2) 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が同じ値に収束する事を示して下さい。この値の事を元の正数 a_0, b_0 の算術幾何平均 (Arithmetic-Geometric Mean) と言って、記号 $AGM(a_0, b_0)$ で表します。

発展演習 19* 任意の正数 $a, b > 0$ と正の整数 n に対して

$$M_n = \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$$

と定義するとき以下の問いに答えてください。

(1) $M_1 \leq M_2$ を示して下さい。

(2) $M_2 \leq M_3$ を示して下さい。

(3) $M_1 \leq M_n$ を示して下さい。

(4) $M_n \leq M_{n+1}$ を示して下さい。