7　面積・体積と多重積分

7.1　１変数の積分の復習

基本演習 **1** 次の積分を計算して下さい（a, b は定数)。

(1) $\displaystyle\int_0^3 \left(\frac{16}{3}x - 2\right) dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 (9y^2 - 3y)dy$

(3) $\displaystyle\int_0^2 (2ay^2 - y)dy$　　(4) $\displaystyle\int_0^3 (2b^2x - b)dx$

(1) $\displaystyle\int_0^3 \left(\frac{16}{3}x - 2\right) dx = \left[\frac{8}{3}x^2 - 2x\right]_0^3 = 24 - 6 = 18$

(2) $\displaystyle\int_0^2 (9y^2 - 3y)dy = \left[3y^3 - \frac{3}{2}y^2\right]_0^2 = 24 - 6 = 18$

(3) $\displaystyle\int_0^2 (2ay^2 - y)dy = \left[\frac{2a}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = \frac{16}{3}a - 2$

(4) $\displaystyle\int_0^3 (2b^2x - b)dx = \left[b^2x^2 - bx\right]_0^3 = 9b^2 - 3b$

7.1.1　気付くこと　〜２重積分の最初のかたち〜

(3) の答えを見ると、これはどこかで見たことがありますね。しかもつい最近。
そうですね、(1) の被積分関数です（文字が x か a かの違いだけです)。
そこで (3) の積分で文字 a のところを始めから文字 x で計算すれば、

$$\int_0^2 (2xy^2 - y)dy = \frac{16}{3}x - 2$$

であって、この形から (1) の計算を考えれば

$$\int_0^3 \left\{\int_0^2 (2xy^2 - y)dy\right\} dx = \int_0^3 \left(\frac{16}{3}x - 2\right) dx = 18 \tag{7.1}$$

を意味していることが分かります。

この様に２変数関数をまず y で積分し (そのときもう一方の変数は定数として扱います)、その結果得られた x の関数を今度は x で積分することを累次積分と言い、これが最も初歩的な形の２重積分になります。

この視点から残りの (2)、(4) を見れば、こちらもやはり

$$\int_0^3 (2y^2x - y)dx = 9y^2 - 3y$$

$$\int_0^2 \left\{\int_0^3 (2y^2x - y)dx\right\} dy = \int_0^2 \left(9y^2 - 3y\right) dy = 18 \tag{7.2}$$

と云う風に考えることが出来ます。これも累次積分です。

更によく見ると、この２つの累次積分 (7.1)、(7.2) は元になっている２変数関数がどちらも $2xy^2 - y$ と同じものになっています。
で、何が違うかと云うと、２つある変数のうちどちらで先に積分するか、どちらを後にするか、その部分だけが違うわけですが、結果はどちらも同じ値 18 になっていますね。つまり偏微分のときの様に２重積分も積分順序によらないのでしょうか。

基本演習 **2** 次の積分と順序を交換したものと２種類計算して下さい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_1^2 xy^2 dy\right\} dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \left\{\int_0^{x^2} x^2 y dy\right\} dx$

(1) を計算してみると確かにこの場合も同じ値になっています。

$$\int_0^1 \left\{\int_1^2 xy^2 dy\right\} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}xy^3\right]_1^2 dx = \int_0^1 \frac{7}{3}x dx = \left[\frac{7}{6}x^2\right]_0^1 = \frac{7}{6}$$

$$\int_1^2 \left\{\int_0^1 xy^2 dx\right\} dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^1 dy = \int_1^2 \frac{1}{2}y^2 dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^2 = \frac{7}{6}$$

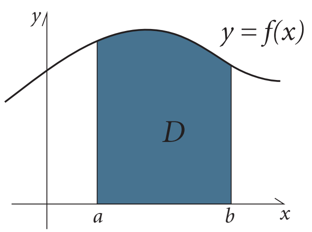
(2) についても順序を逆にしたものも計算してみましょう：

$$\int_0^2 \left\{\int_0^{x^2} x^2 y dy\right\} dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^{x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^6 dx = \left[\frac{1}{14}x^7\right]_0^2 = \frac{64}{7}$$

$$\int_0^{x^2} \left\{\int_0^2 x^2 y dx\right\} dy = \int_0^{x^2} \left[\frac{1}{3}x^3y\right]_0^2 dy = \int_0^{x^2} \frac{8}{3}y dy = \left[\frac{4}{3}y^2\right]_0^{x^2} = \frac{4}{3}x^4$$

あれ？　一致しませんね。しかも単に一致していないと言うよりも、積分順序を入れ替えると定数ではなく関数になってしまい質的におかしい気がします。

7.2　積分と面積　〜区分求積法〜



（非負値）関数 $f(x)$ のグラフと x-軸と、２直線 $x = a, x = b$（ただし $a < b$ とます）で囲まれた領域 D の面積が積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

で計算される事は既にご存知の通りです。

これはこの領域を細かく縦に千切りにして１本１本の面積を計算して全部足し合わせると云う積分本来の定義方法、いわゆる区分求積法に基づいているわけですから、本当は有限個に分割して、その分割をどんどん細かくして行く極限値を考えなければなりませんがいろいろ面倒な記述になりますので敢えて１７世紀の記法『微小幅 dx』を使えば、領域 D を微小幅に千切りにした時、一般に x-座標が x である所で切った１本は縦が $f(x)$、横が微小幅 dx の長方形と考えられますからその面積は $f(x)dx$ となり、これを $x = a$ から $x = b$ まで全部足すと云う記号を『足す（sum)』の頭文字をとって $\int_a^b$ で表し、結果的に全体の面積は

$$\underbrace{\int_a^b}_{\text{全部足す}} \underbrace{f(x)dx}_{\text{１本の面積}}$$

と書ける事になるわけです。

しかし後年積分は微分の逆演算である事が発見され、具体的な積分計算はまず『微分すると $f(x)$ になるような関数（これを $f(x)$ の原始関数と呼びます)』$F(x)$ をどこかから見つけて来て、これを使って

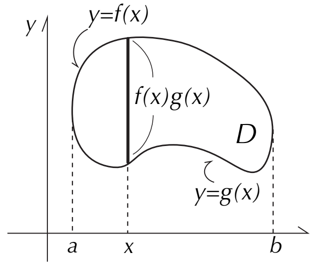
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

と計算すれば良い事になり、大抵の積分計算はこの方法によって実行されています。

この様に積分と云うものは本来の『面積を求める』と云う目的から離れ、純粋に抽象的に『関数 $f(x)$ を積分する』と考える事も出来ます。この目から見ると、今見た領域 D の面積は関数 $f(x)$ の積分に他ならないわけで、では領域 D にとって $f(x)$ とは何だろうかと考えてみると、これはこの領域を縦に切った時の切り口の幅なんですね。だからその意味で

$$（\text{面積}）= \int（\text{切り口の幅}）dx$$

と解釈する事も出来るわけです。



もっと一般的な領域の場合、例えば下図のような領域 D の場合にも、

$$（D\text{ の面積}）= \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\, dx$$

となっており、やはり領域を切ったときの切り口の幅を積分すれば領域の面積が得られます。

7.3　面積と２重積分から体積と３重積分へ

面積を計算する時に、千切りばかりが能ではありません。みじん切りにしたって良い筈です。つまり、領域 D を縦 dy、横 dx の（各辺が座標軸に平行な）微小長方形に分割し、１枚の面積 $dxdy$ を領域 D 内で全部足せば全体の面積になる筈です。この時の『全部足す』も、さっきと同様の記号 $\int_D$ で表しますが、２次元の概念である面積を足すのでそれを表現して $\iint_D$ と書くことが多いようです。

$$（\text{領域 } D\text{ の面積}）= \underbrace{\iint_D}_{\text{全部足す}} \underbrace{dxdy}_{\text{１枚の面積}}$$

こう云った類いの２次元での『全部足す』のことを２重積分と呼んでいます。

ただしこの解釈では実際に具体的な計算をしようとすると色々と困難が多いので、あくまで『考え方』としてそう云うものがあると考えておけば良いでしょう。具体的に計算する時は領域を千切りにして切り口の幅を積分すれば良いわけです。

全く同様に３次元空間内の領域 R の体積を求めるとき、この領域（あるいは立体と考えても良いでしょう）をみじん切りにし、１個１個の直方体の体積を全部足すという発想で３重積分

$$（\text{領域 } R\text{ の体積}）= \underbrace{\iiint_R}_{\text{全部足す}} \underbrace{dxdydz}_{\text{１個の体積}}$$

を考えます。ただしこれも具体的な計算に向いた解釈ではありません。

7.4　体積の具体的な計算方法

さっき面積を計算した時に、切り口の幅を積分すると面積になると云う事を見ましたが、これを３次元に拡張すると当然、立体（＝領域）をスライスした時の断面積を積分

すれば体積が復元出来ると考えられるわけです。

$$（面積）= \int（切り口の幅）dx \qquad \Rightarrow \qquad （体積）= \int（断面積）dx$$

実際に３次元の領域（＝立体）R を x-軸に垂直な平面群でスライスする事を考えましょう。スライスの幅は x-軸方向の微小幅なので dx とします。すると、１枚の食パンの体積は

$$（１枚の体積）=（断面積）\times dx$$

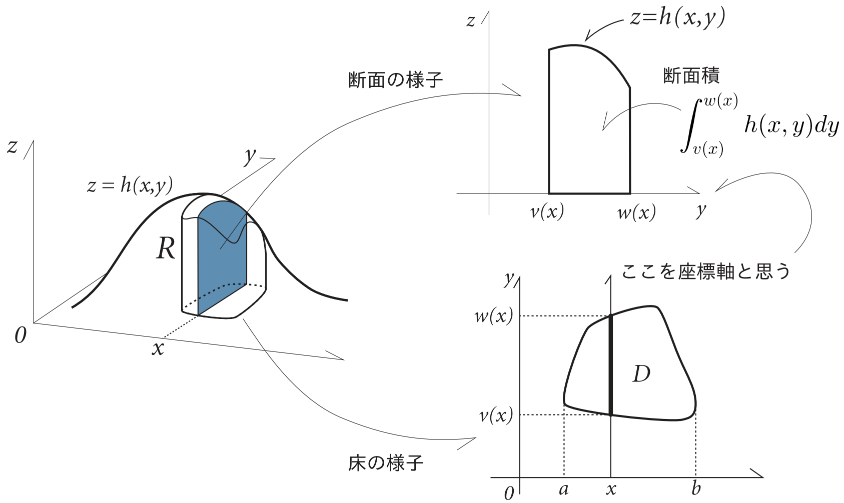
ですから、切る範囲が $x = a$ から $x = b$ までであるなら

$$（領域 R の体積）= \underbrace{\int_a^b}_{全部足す} \underbrace{（断面積）dx}_{１枚の体積}$$

となる筈です。

もう少し具体的に見てみましょう。２変数関数 $h(x, y)$ のグラフである曲面 $z = h(x, y)$ と xy-平面内の領域 D が与えられているとしましょう。このとき、曲面 $z = h(x, y)$ と xy-平面、そして領域 D の周囲に立てた垂直な壁によって囲まれる領域（立体）R の体積はどのように計算されるでしょうか。

まず立体 R を x-座標が x の所でスライスした時に床である領域 D もスライスされますがその時の y-座標の範囲が $v(x) \leq y \leq w(x)$ であり、スライスする範囲が x-座標で言って a から b までだったとしましょう（下図右下）。



これは領域 D が連立不等式：

$$\begin{cases} v(x) \leq y \leq w(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

で表される事を意味します。このとき断面は上図右上のようになっており、その断面積は

$$（断面積）= \int_{v(x)}^{w(x)} h(x, y)dy$$

で計算されます（もともと $h(x, y)$ は２変数関数ですが、今は x-座標一定の平面で切っていますから x を固定して考えているので $h(x, y)$ は y の１変数関数として考えて積分しています）。

従って全体の体積はこの断面積を積分して

$$（領域 R の体積）= \int_a^b（断面積）dx = \int_a^b \left\{ \int_{v(x)}^{w(x)} h(x, y)dy \right\} dx$$

と計算される事が分かります。

この様に立体の体積を計算しようとすると、２変数関数をまず変数 y で積分し、次いでその結果得られる x の１変数関数を今度は x で積分する計算が出てきます。

このような計算を『逐次積分』あるいは『累次積分』と呼びます。

Exercise

基本演習 3 次の逐次積分を計算してください。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_1^2 (2x + 2y)dx \right\} dy$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left\{ \int_0^1 x\mathrm{e}^{xy} dy \right\} dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^x (x + 2y)dy \right\} dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_y^{2-y} 3(x + y)dx \right\} dy$

(5) $\displaystyle\int_0^\pi \left\{ \int_0^{\sin x} 2y\, dy \right\} dx$

基本演習 4 基本演習２の (2) ではなぜ積分順序の交換によって値が変わってしまうのか考え、どうしたら良いか考えて下さい。

Exercise 解答例

基本演習 3

(1)

$$\int_0^1 \left\{ \int_1^2 (2x+2y)dx \right\} dy = \int_0^1 \left[x^2 + 2yx \right]_1^2 dy$$
$$= \int_0^1 \{(4-1) + 2y(2-1)\} dy$$
$$= \int_0^1 (2y+3) dy$$
$$= \left[y^2 + 3y \right]_0^1$$
$$= 4$$

(2)

$$\int_{-1}^2 \left\{ \int_0^1 x\mathrm{e}^{xy} dy \right\} dx = \int_{-1}^2 \left[\mathrm{e}^{xy} \right]_0^1 dx$$
$$= \int_{-1}^2 (\mathrm{e}^x - 1) dx$$
$$= \left[\mathrm{e}^x - x \right]_{-1}^2$$
$$= \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-1} - 3$$

(3)

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^x (x+2y) dy \right\} dx = \int_0^1 \left[xy + y^2 \right]_0^x dx$$
$$= \int_0^1 2x^2 dx$$
$$= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1$$
$$= \frac{2}{3}$$

(4)

$$\int_0^1 \left\{ \int_y^{2-y} 3(x+y) dx \right\} dy = \int_0^1 \left[\frac{3}{2} x^2 + 3xy \right]_y^{2-y} dy$$
$$= \int_0^1 \left\{ \frac{3}{2}(2-y)^2 + 3(2-y)y - \frac{3}{2} y^2 - 3y^2 \right\} dy$$
$$= \int_0^1 (-6y^2 + 6) dy$$
$$= \left[-2y^3 + 6y \right]_0^1$$
$$= 4$$

(5)

$$\int_0^\pi \left\{ \int_0^{\sin x} 2y\, dy \right\} dx = \int_0^\pi \left[y^2 \right]_0^{\sin x} dx$$
$$= \int_0^\pi \sin^2 x\, dx$$
$$= \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx$$
$$= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

基本演習 4

次回講義で扱います。自分である程度考えてみてください。