

7 面積・体積と多重積分

7.1 1 変数の積分の復習

基本演習 1 次の積分を計算して下さい (a, b は定数)。

$$(1) \int_0^3 \left(\frac{16}{3}x - 2 \right) dx \quad (2) \int_0^2 (9y^2 - 3y) dy$$

$$(3) \int_0^2 (2ay^2 - y) dy \quad (4) \int_0^3 (2b^2x - b) dx$$

7.1.1 気付くこと ～2重積分の最初のかたち～

(3) の答えを見ると、これはどこかで見たことがありますね。しかもつい最近。

そうですね、(1) の被積分関数です (文字が x か a の違いだけです)。

そこで (3) の積分で文字 a のところを始めてから文字 x で計算すれば、

$$\int_0^2 (2xy^2 - y) dy = \frac{16}{3}x - 2$$

であって、この形から (1) の計算を考えれば

$$\int_0^3 \left\{ \int_0^2 (2xy^2 - y) dy \right\} dx = \int_0^3 \left(\frac{16}{3}x - 2 \right) dx = 18 \quad (7.1)$$

を意味していることが分かります。

この様に 2 変数関数をまず y で積分し (そのときもう一方の変数は定数として扱います)、その結果得られた x の関数を今度は x で積分することを累次積分と言い、これが最も初歩的な形の 2 重積分になります。

この視点から残りの (2)、(4) を見れば、こちらもやはり

$$\begin{aligned} \int_0^3 (2y^2x - y) dx &= 9y^2 - 3y \\ \int_0^2 \left\{ \int_0^3 (2y^2x - y) dx \right\} dy &= \int_0^2 (9y^2 - 3y) dy = 18 \end{aligned} \quad (7.2)$$

と云う風に考えることが出来ます。これも累次積分です。

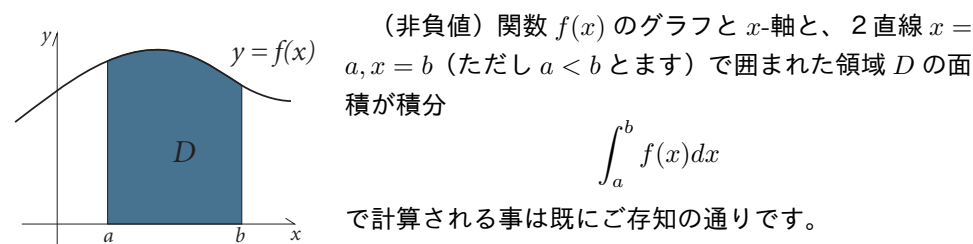
更によく見ると、この 2 つの累次積分 (7.1)、(7.2) は元になっている 2 変数関数がどちらも $2xy^2 - y$ と同じものになっています。

で、何が違うかと云うと、2 つある変数のうちどちらで先に積分するか、どちらを後にするか、その部分だけが違うわけですが、結果はどちらも同じ値 18 になっていますね。つまり偏微分のときの様に 2 重積分も積分順序によらないのでしょうか。

基本演習 2 次の積分と順序を交換したものと 2 種類計算して下さい。

$$(1) \int_0^1 \left\{ \int_1^2 xy^2 dy \right\} dx \quad (2) \int_0^2 \left\{ \int_0^{x^2} x^2 y dy \right\} dx$$

7.2 積分と面積 ～区分求積法～



これはこの領域を細かく縦に千切りにして 1 本 1 本の面積を計算して全部足し合わせると云う積分本来の定義方法、いわゆる区分求積法に基づいているわけですから、本当は有限個に分割して、その分割をどんどん細かくして行く極限值を考えなければなりませんがいりいろ面倒な記述になりますので敢えて 17 世紀の記法『微小幅 dx 』を使えば、領域 D を微小幅に千切りにした時、一般に x -座標が x である所で切った 1 本は縦が $f(x)$ 、横が微小幅 dx の長方形と考えられますからその面積は $f(x)dx$ となり、これを $x = a$ から $x = b$ まで全部足すと云う記号を『足す (sum)』の頭文字をとって $\int_a^b$ で表し、結果的に全体の面積は

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{全部足す 1 本の面積}}$$

と書ける事になるわけです。

しかし後年積分は微分の逆演算である事が発見され、具体的な積分計算はまず『微分

すると $f(x)$ になるような関数（これを $f(x)$ の原始関数と呼びます） $F(x)$ をどこから見つけて来て、これを使って

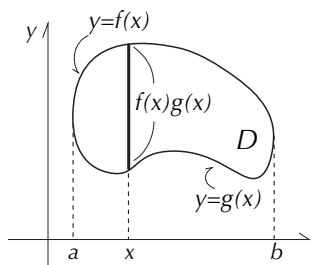
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

と計算すれば良い事になり、大抵の積分計算はこの方法によって実行されています。

この様に積分と云うものは本来の『面積を求める』と云う目的から離れ、純粋に抽象的に『関数 $f(x)$ を積分する』と考える事も出来ます。この目から見ると、今見た領域 D の面積は関数 $f(x)$ の積分に他ならないわけで、では領域 D にとって $f(x)$ とは何だろうかと考えてみると、これはこの領域を縦に切った時の切り口の幅なんですね。だからその意味で

$$(\text{面積}) = \int (\text{切り口の幅})dx$$

と解釈する事も出来るわけです。



もっと一般的な領域の場合、例えば下図のような領域 D の場合にも、

$$(D \text{ の面積}) = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

となっており、やはり領域を切ったときの切り口の幅を積分すれば領域の面積が得られます。

7.3 面積と 2 重積分から体積と 3 重積分へ

面積を計算する時に、千切りばかりが能ではありません。みじん切りにしたって良い筈です。つまり、領域 D を縦 dy 、横 dx の（各辺が座標軸に平行な）微小長方形に分割し、1 枚の面積 $dx dy$ を領域 D 内で全部足せば全体の面積になる筈です。この時の『全部足す』も、さっきと同様の記号 $\int_D$ で表しますが、2 次元の概念である面積を足すのでそれを表現して $\iint_D$ と書くことが多いようです。

$$(\text{領域 } D \text{ の面積}) = \underbrace{\iint_D}_{\text{全部足す}} \underbrace{dx dy}_{\text{1 枚の面積}}$$

こう云った類いの 2 次元での『全部足す』のことを 2 重積分と呼んでいます。

ただしこの解釈では実際に具体的な計算をしようとすると色々困難が多いので、あくまで『考え方』としてそう云うものがあると考えておけば良いでしょう。具体的に計算する時は領域を千切りにして切り口の幅を積分すれば良いわけです。

全く同様に 3 次元空間内の領域 R の体積を求めるとき、この領域（あるいは立体と考えても良いでしょう）をみじん切りにし、1 個 1 個の直方体の体積を全部足すという発想で 3 重積分

$$(\text{領域 } R \text{ の体積}) = \underbrace{\iiint_R}_{\text{全部足す}} \underbrace{dx dy dz}_{\text{1 個の体積}}$$

を考えます。ただしこれも具体的な計算に向けた解釈ではありません。

7.4 体積の具体的な計算方法

さっき面積を計算した時に、切り口の幅を積分すると面積になると云う事を見ましたが、これを 3 次元に拡張すると当然、立体（＝領域）をスライスした時の断面積を積分すれば体積が復元出来ると考えられるわけです。

$$(\text{面積}) = \int (\text{切り口の幅})dx \quad \Rightarrow \quad (\text{体積}) = \int (\text{断面積})dx$$

実際に 3 次元の領域（＝立体） R を x -軸に垂直な平面群でスライスする事を考えましょう。スライスの幅は x -軸方向の微小幅なので dx とします。すると、1 枚の食パンの体積は

$$(\text{1 枚の体積}) = (\text{断面積}) \times dx$$

ですから、切る範囲が $x = a$ から $x = b$ までであるなら

$$(\text{領域 } R \text{ の体積}) = \underbrace{\int_a^b}_{\text{全部足す}} \underbrace{(\text{断面積})dx}_{\text{1 枚の体積}}$$

となる筈です。

もう少し具体的に見てみましょう。2 変数関数 $h(x, y)$ のグラフである曲面 $z = h(x, y)$ と xy -平面内の領域 D が与えられているとしましょう。このとき、曲面 $z = h(x, y)$ と xy -平面、そして領域 D の周囲に立てた垂直な壁によって囲まれる領域（立体） R の体積はどのように計算されるのでしょうか。

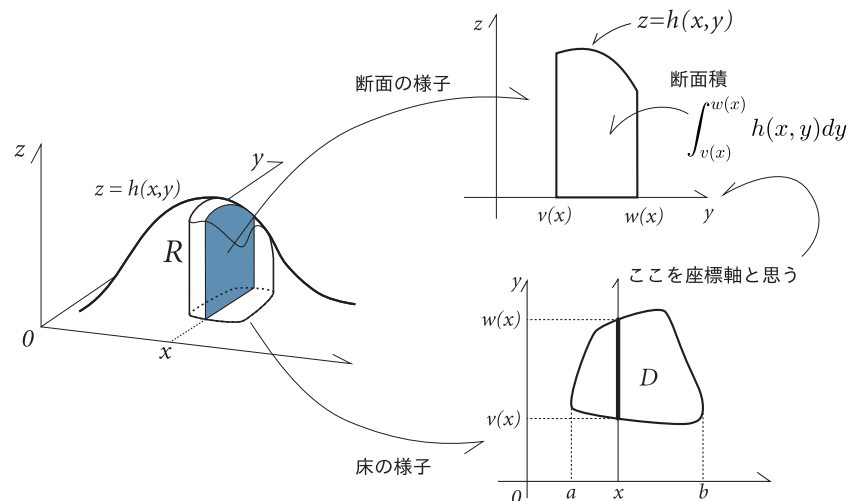
まず立体 R を x -座標が x の所でスライスした時に床である領域 D もスライスされますがその時の y -座標の範囲が $v(x) \leq y \leq w(x)$ であり、スライスする範囲が x -座標で言って a から b までだったとしましょう（下図右下）。

Exercise

基本演習 3 次の逐次積分を計算してください。

- (1) $\int_0^1 \left\{ \int_1^2 (2x + 2y) dx \right\} dy$ (2) $\int_{-1}^2 \left\{ \int_0^1 x e^{xy} dy \right\} dx$
- (3) $\int_0^1 \left\{ \int_0^x (x + 2y) dy \right\} dx$ (4) $\int_0^1 \left\{ \int_y^{2-y} 3(x + y) dx \right\} dy$
- (5) $\int_0^\pi \left\{ \int_0^{\sin x} 2y dy \right\} dx$

基本演習 4 基本演習 2 の (2) ではなぜ積分順序の交換によって値が変わってしまうのか考え、どうしたら良いか考えて下さい。



これは領域 D が連立不等式：

$$\begin{cases} v(x) \leq y \leq w(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

で表される事を意味します。このとき断面は上図右上のようになっており、その断面積は

$$(\text{断面積}) = \int_{v(x)}^{w(x)} h(x, y) dy$$

で計算されます (もともと $h(x, y)$ は 2 変数関数ですが、今は x -座標一定の平面で切っていますから x を固定して考えているので $h(x, y)$ は y の 1 変数関数として考えて積分しています)。

従って全体の体積はこの断面積を積分して

$$(\text{領域 } R \text{ の体積}) = \int_a^b (\text{断面積}) dx = \int_a^b \left\{ \int_{v(x)}^{w(x)} h(x, y) dy \right\} dx$$

と計算される事が分かります。

この様に立体の体積を計算しようとする、2 変数関数をまず変数 y で積分し、次いでその結果得られる x の 1 変数関数を今度は x で積分する計算が出てきます。

このような計算を『逐次積分』あるいは『累次積分』と呼びます。