

8 2重積分と累次積分

8.1 積分範囲に文字（積分変数）が入っている場合の順序交換

前回の基本演習 2 の (2) の積分を見て下さい。

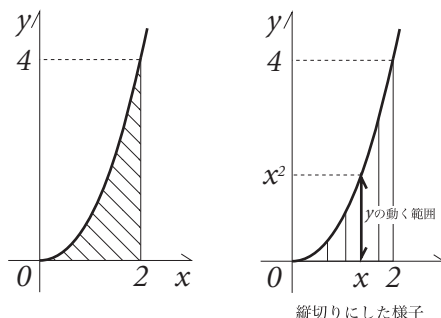
$$\int_0^2 \left\{ \int_0^{x^2} x^2 y dy \right\} dx$$

この積分を『体積の計算』だと思ふ事にすれば、内側の積分は元の立体を x 一定の平面で切った切り口の断面積の計算に相当していました。従ってその断面積の積分範囲である $0 \leq y \leq x^2$ が、丁度『床』を x 一定の直線で切ったときの切り口になっており、

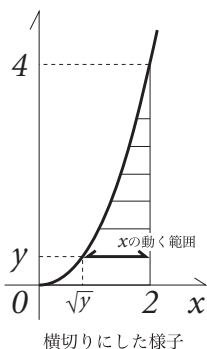
『床』に相当する領域は

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

と云う不等式で表すことが出来、この領域を図示すると右図のようになります。



次に切り方を変えて、いま立体を x -軸に垂直な平面群でスライスしていたのを、今度は y -軸に垂直な平面群でスライスする事を考えましょう。問題の立体を y 一定の平面で切ったとき、床もそれに応じて切られるわけですが、実際に上図の領域をある y のところで横切りにしてみると、下図のようになっていて、その切り口での x の動く範囲は $\sqrt{y} \leq x \leq 2$ となっています。更に y は $0 \leq y \leq 4$ の範囲を動きます。



以上から床に相当する領域は別の不等式：

$$\begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

で表されることになるわけです。これが領域を横切りにした場合の表現不等式です。

この様に領域を表す不等式は 1 通りではありません。

さて、元の立体を y -軸に垂直な平面群でスライスした場合、まず断面積は y を固定して x を $\sqrt{y} \leq x \leq 2$ の範囲で動かして積分します。そしてその結果を今度は $0 \leq y \leq 4$

で積分しますから、それは

$$\int_0^4 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^2 x^2 y dx \right\} dy$$

になるはずです。これを計算してみると

$$\int_0^4 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^2 x^2 y dx \right\} dy = \int_0^4 \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_{\sqrt{y}}^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^4 (8y - y^{\frac{5}{2}}) dy = \frac{1}{3} \left[4y^2 - \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} \right]_0^4 = \frac{64}{7}$$

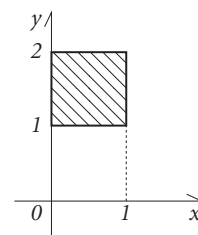
となって (2) の積分と結果が一致しています。どうやらこれが『正しい』積分順序の交換法の様です。

8.2 積分範囲が全て定数で書けている場合

前回の基本演習 2 の (1) はシンプルにそのまま交換しただけで良かったと思いますが、

積分領域を不等式で書くと

$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



ですからこれを図示すると左図の様な長方形になっています。これを“縦切り”にしたのが上の不等式だったわけです。

実はこの長方形は横切りにしても、ある y で切ったとき、 x の動く範囲は y には依存せず $0 \leq x \leq 1$ です。従ってこの領域を横切りにした不等式は

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

であって、これはさっきの連立不等式と全く同じです。

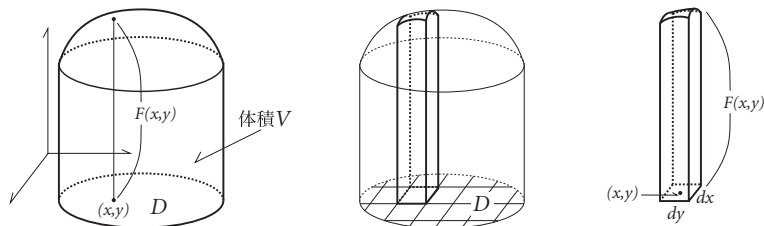
従って積分領域が（座標軸に平行な）長方形である場合は単純に順番を変えるだけでちゃんとした積分順序の交換になってくれていたんです。

8.3 2重積分

先週見たように累次積分は体積の計算に関連していました。

一般に床が領域 D で、領域 D 内の各点 (x, y) における屋根の高さが $F(x, y)$ である様な立体の体積 V は次のように計算されます。

床に座標軸に平行な線を沢山書いて細かいタイルで分割したようにし、それに応じて立体を細長い“いもけんぴ”に分割します。



このタイル 1 枚 1 枚は横 dx 、縦 dy であるとすればタイル 1 枚の面積は $dx dy$ です。また、1 本のいもけんぴは大体直方体であると思えば、その底面タイル内に点 (x, y) がある場合（3次元空間内では正確には点 $(x, y, 0)$ でしょうか）その高さは大体 $F(x, y)$ ですから、大雑把に言って 1 本のいもけんぴの体積は $f(x, y) dx dy$ となります。

これを全てのタイルで足し合わせれば全体の体積になりますから、これを

$$V = \underbrace{\iint_D}_{\text{領域 } D \text{ 内で}} \underbrace{F(x, y) dx dy}_{\substack{\text{いもけんぴ} \\ \text{1 本の体積} \\ \text{せると言う記号}}}$$

と書くことにするわけです。これが 2 変数関数 $F(x, y)$ を領域 D で積分すると云う事で、2 重積分と呼ばれています。

8.4 2 重積分と累次積分の関係

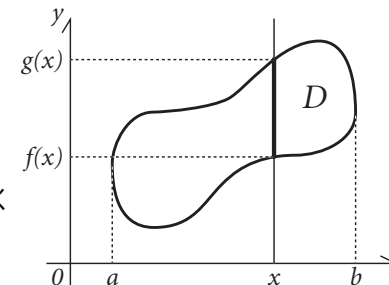
また、この同じ体積は、前回見たように立体をスライスして断面積を積分する事によって累次積分でも計算出来ましたから、結果的に（体積と云う考え方を媒介として）累次積分と 2 重積分が等しい事が判ります。これをまとめると次のようになります。

2 変数関数 $F(x, y)$ を領域 D で 2 重積分する事を考えます。積分領域 D をたて切りにしたとき、切り口、すなわち y の動く範囲はどこで切るかによって違いますからそれを下図の様に $f(x) \leq y \leq g(x)$ としましょう。

このとき、領域 D は不等式：

$$D : \begin{cases} f(x) \leq y \leq g(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

で表され、2 重積分は次の様な累次積分と等しくなります：



定理 8.1 $a \leq x \leq b$ において $f(x) \leq g(x)$ であって、領域 D が不等式：

$$\begin{cases} f(x) \leq y \leq g(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

で表されるならば、(連続関数) $F(x, y)$ の D における 2 重積分 $\iint_D F(x, y) dx dy$ は次の累次積分に等しい：

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{f(x)}^{g(x)} F(x, y) dy \right\} dx.$$

全く同様に横切りにして累次積分に帰着させる事も出来ます

定理 8.2 $c \leq y \leq d$ において $v(y) \leq w(y)$ であって、領域 D が不等式：

$$\begin{cases} v(y) \leq x \leq w(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

で表されるならば、(連続関数) $F(x, y)$ の D における 2 重積分 $\iint_D F(x, y) dx dy$ は次の累次積分に等しい：

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_{v(y)}^{w(y)} F(x, y) dx \right\} dy.$$

基本演習 1 [教科書問題 8.1] そのままの順序と順序交換をしたものを計算して下さい。

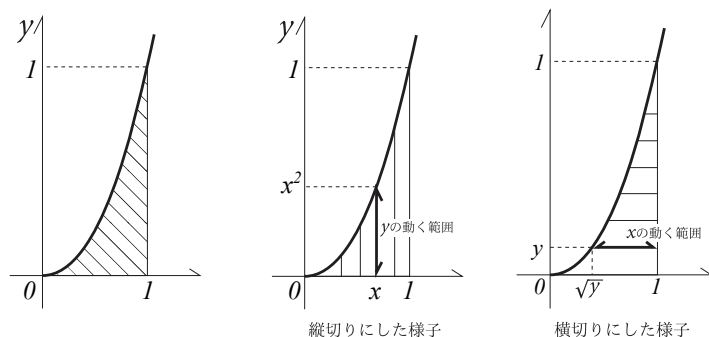
$$(3) \int_0^1 \left\{ \int_0^{x^2} (x^2 + 2y) dy \right\} dx \quad (4) \int_0^2 \left\{ \int_{-x}^x x^2 y^2 dy \right\} dx$$

(3) まずこの順番で積分すると、

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^{x^2} (x^2 + 2y) dy \right\} dx = \int_0^1 [x^2 y + y^2]_0^{x^2} dx = \int_0^1 2x^4 dx = \left[\frac{2}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

です。

積分領域は下図の通り：



ですから、不等式：

$$\begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

で表すことが出来、積分順序を交換したものは

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 + 2y) dx \right\} dy &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 + 2yx \right]_{\sqrt{y}}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + 2y - \frac{7}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) dy \\ &= \left[\frac{1}{3} y + y^2 - \frac{14}{15} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

となります。

(4) まずこの順番で積分すると、

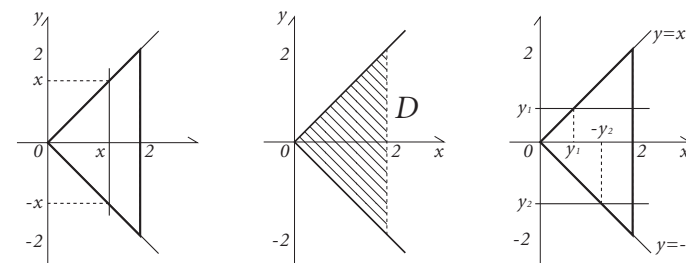
$$\int_0^2 \left\{ \int_{-x}^x x^2 y^2 dy \right\} dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x^2 y^3 \right]_{-x}^x dx = \int_0^2 \frac{2}{3} x^5 dx = \left[\frac{1}{9} x^6 \right]_0^2 = \frac{64}{9}$$

となります。

次に積分の順序交換をするために、まずこの積分領域 (D とします) を不等式で表し：

$$\begin{cases} -x \leq y \leq x \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

更にこれを図示すると下図 (真ん中) のようになっています。



これを上図左のように"たて切り"にして不等式で表したものが先ほどの不等式でした。

従って積分順序を交換するためには、今度はこの領域をよこ切りにして (上右図) 不等式で表現すれば良いのですが、この領域を横に切ろうとするとどうしても全体を一つの不等式で表すことが出来ません。

なぜなら、 $y > 0$ で切る場合と $y < 0$ で切る場合では、切り口の x の範囲の左側を決定する直線が違ってしまうからです。

仕方がないので2つに分けて (上から D_+ , D_- とします) 書くことにします：

$$D_+ : \begin{cases} y \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad D_- : \begin{cases} -y \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

床が2つにスプリットしている場合は、当然ですがそれぞれの上の体積を計算して足し合わせれば全体の体積になる筈です。つまり、それぞれの不等式に対応した累次積分を計算してそれらを足し合わせれば良いことになります。

事実 8.3 積分領域 D が交わらない（境界線を共有するのは構いません）2つの領域 D_1, D_2 の和集合になっているとき（これを $D = D_1 \cup D_2$ などと書きます）、 D での関数 $F(x, y)$ の2重積分はそれぞれの領域での積分の和になります：

$$\begin{aligned}\iint_D F(x, y) dx dy &= \iint_{D_1 \cup D_2} F(x, y) dx dy \\ &= \iint_{D_1} F(x, y) dx dy + \iint_{D_2} F(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

実際やってみると：

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y^2 dx dy &= \iint_{D_+} x^2 y^2 dx dy + \iint_{D_-} x^2 y^2 dx dy \\ &= \int_0^2 \left\{ \int_y^2 x^2 y^2 dx \right\} dy + \int_{-2}^0 \left\{ \int_{-y}^2 x^2 y^2 dx \right\} dy \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x^3 y^2 \right]_y^2 dy + \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{3} x^3 y^2 \right]_{-y}^2 dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 (8y^2 - y^5) dy + \frac{1}{3} \int_{-2}^0 (8y^2 + y^5) dy \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{8}{3} y^3 - \frac{1}{6} y^6 \right]_0^2 + \frac{1}{3} \left[\frac{8}{3} y^3 + \frac{1}{6} y^6 \right]_{-2}^0 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{8^2}{3} - \frac{2^6}{6} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{8^2}{3} - \frac{2^6}{6} \right) \\ &= \frac{64}{9}\end{aligned}$$

ちゃんと同じ値になります。

Exercise

基本演習 2 [教科書問題 8.2] 次の2重積分を2通りの積分順序で累次積分にして計算して下さい。

$$(1) \iint_D xy dx dy, \quad D : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3$$

$$(2) \iint_D (1 - x - y) dx dy, \quad D : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$$

$$(3) \iint_D xy dx dy, \quad D : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4$$

$$(4) \iint_D e^{x-y} dx dy, \quad D : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1$$

基本演習 3 [問題集 8.2(4)] 次の累次積分の積分順序を交換して計算して下さい：

$$\int_0^1 \int_x^{2x} 2x^2 y dy dx.$$

基本演習 4 [問題集 8.11(4)] $a > 0$ の時に次の2重積分をたて切り・よこ切りの2通りの累次積分に直して計算して下さい：

$$\iint_D x dx dy, \quad D : \begin{cases} a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2ay \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

基本演習 5 [名工大 2020] 次の2重積分を計算してください：

$$J = \iint_D \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2y + 4)^3}} dx dy \quad D : 2x^2 - 1 \leq y \leq x^2$$

基本演習 6 次の2重積分を計算して下さい：

$$\iint_D \begin{cases} y^2 \leq x^3 + 17 \\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \end{cases} y dx dy$$

発展演習 7 次の2重積分を計算してください：

$$\iint_D \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} 2y dx dy.$$

Exercise 解答例

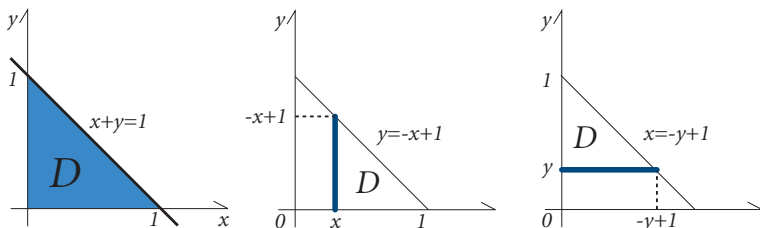
基本演習 2 教科書問題 8.2、(1)~(4) 2通りの積分順序で計算する事。

(1) この領域 D は長方形であり、縦切りにしても横切りにしても全く同じ連立不等式で表現されます。従って積分順序の変更は単純に入れ替えるだけで済みます。

$$\iint_D xy \, dx dy = \int_1^3 \int_0^1 xy \, dx dy = \int_1^3 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_0^1 dy = \int_1^3 \frac{1}{2} y \, dy = \left[\frac{1}{4} y^2 \right]_1^3 = 2$$

$$\iint_D xy \, dx dy = \int_0^1 \int_1^3 xy \, dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_1^3 dx = \int_0^1 4x \, dx = \left[2x^2 \right]_0^1 = 2$$

(2) 積分領域を図示すると下図の通りです：



まず縦切りにして不等式で表現すると（上図中央）

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq -x + 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ですから、累次積分に変形すると

$$\begin{aligned} \iint_D (1-x-y) \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^{-x+1} (1-x-y) \, dy dx \\ &= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{-x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{6} (x-1)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

です。

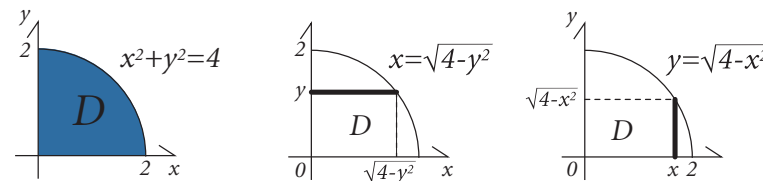
また横切りにして（上図右）不等式で表現すると

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq -y + 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

ですからやはり累次積分に変形すれば以下の通り同じ値になります。

$$\begin{aligned} \iint_D (1-x-y) \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^{-y+1} (1-x-y) \, dx dy \\ &= \int_0^1 \left[(1-y)x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{-y+1} dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (1-y)^2 dy \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(3) 積分領域を図示すると下図の通りです：



まず横切りにして（上図中央）領域を不等式表現して累次積分します。

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

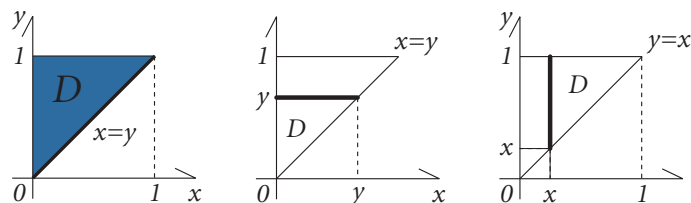
$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx dy &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy \, dx dy \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2} (4-y^2) y \, dy \\ &= \left[y^2 - \frac{1}{8} y^4 \right]_0^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

また、縦切りにして（上図右）同様にすれば同じ値になります。

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\iint_D xy \, dx dy = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x(4-x^2) dx = 2$$

(4) 積分領域を図示すると下図の通りです：



まず横切りにして（上図中央）領域を不等式表現して累次積分します。

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x-y} dx dy &= \int_0^1 \int_0^y e^{x-y} dx dy \\ &= \int_0^1 [e^{x-y}]_0^y dy \\ &= \int_0^1 (1 - e^{-y}) dy \\ &= [y + e^{-y}]_0^1 \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

同様に縦切り（上図右）にして累次積分します。

$$D: \begin{cases} x \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x-y} dx dy &= \int_0^1 \int_x^1 e^{x-y} dy dx \\ &= \int_0^1 [-e^{x-y}]_x^1 dx \\ &= \int_0^1 (1 - e^{x-1}) dx \\ &= [x - e^{x-1}]_0^1 \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

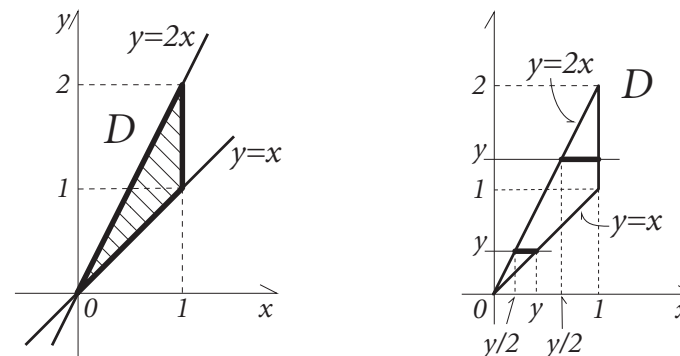
基本演習 3 [問題集 8.2(4)] 次の累次積分の積分順序を交換して計算して下さい：

$$\int_0^1 \int_x^{2x} 2x^2 y \, dy dx.$$

まずこの積分領域（ D とします）を不等式で表すと

$$\begin{cases} x \leq y \leq 2x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

となり、これを図示すると下図左のようになってます：



先ほどの不等式はこの領域をたて切りにした不等式でしたので今度は横切りにしてみよう。これは上図右の通りで、切る位置によって x の動く範囲を表す関数が変わっ

て来ますので注意しますと

$$\begin{cases} \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \frac{y}{2} \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

が得られます。これを元にもとの累次積分（これを J とします）を横切りの累次積分に直せば

$$J = \int_1^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 2x^2 y \, dx dy + \int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^y 2x^2 y \, dx dy$$

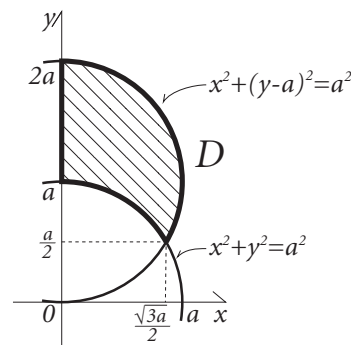
です。後はこの積分を計算します。

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_{\frac{y}{2}}^1 y \, dy + \int_0^1 \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_{\frac{y}{2}}^y y \, dy \\ &= \frac{2}{3} \int_1^2 \left(y - \frac{y^4}{2^3} \right) dy + \frac{2}{3} \int_0^1 \left(y^4 - \frac{y^4}{2^3} \right) dy \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{40} \right]_1^2 + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{5} y^5 - \frac{y^5}{40} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \left(2 - \frac{4}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{40} + \frac{1}{5} - \frac{1}{40} \right) \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

□

基本演習 4 [問題集 8.11(4)] $a > 0$ の時に次の 2 重積分をたて切り・よこ切りの 2 通りの累次積分に直して計算して下さい：

$$\iint_D x \, dx dy, \quad D : \begin{cases} a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2ay \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

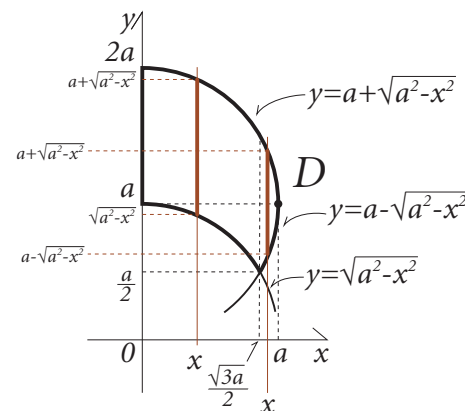


まずこの積分領域 D を図示すると、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 2ay \\ x^2 + y^2 - 2ay &\leq a^2 \\ x^2 + (y-a)^2 &\leq a^2 \end{aligned}$$

に注意すれば左図の様な 2 円と座標軸に囲まれた領域となります。

それではこの領域をまずたて切りにして不等式で表現し累次積分へと変形します。



図の通り、たて切りにする場合、切る位置が $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ の右側である場合と左側である場合とでは y の範囲を指定する関数が変わって来ます。領域を表す不等式は

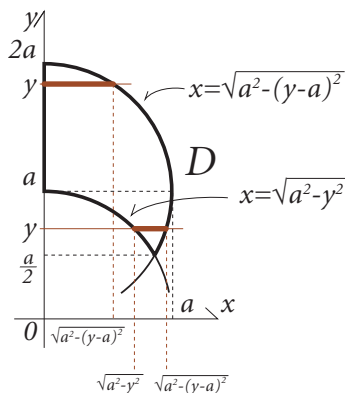
$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq a + \sqrt{a^2 - x^2} \\ 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}a}{2} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a - \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq a + \sqrt{a^2 - x^2} \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

となり、これに応じて累次積分に変形すれば題意の積分 J は

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} x \, dy \, dx + \int_{\frac{\sqrt{3}a}{2}}^a \int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} x \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} ax \, dx + \int_{\frac{\sqrt{3}a}{2}}^a 2x\sqrt{a^2-x^2} \, dx \\ &= \left[\frac{a}{2}x^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} + \left[-\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{\sqrt{3}a}{2}}^a \\ &= \frac{3a^3}{8} + \frac{2a^3}{3 \cdot 8} \\ &= \frac{11}{24}a^3 \end{aligned}$$

となる事が分かります。

次に横切りにすると図の様にこちらも切る位置が a を境にして x の動く範囲を記述する関数が変わります。



領域を表す不等式は

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - (y-a)^2} \\ a \leq y \leq 2a \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{a^2 - (y-a)^2} \\ \frac{a}{2} \leq y \leq a \end{cases}$$

となり、これに応じて累次積分に変形すれば題意の積分 J は

$$\begin{aligned} J &= \int_a^{2a} \int_0^{\sqrt{a^2-(y-a)^2}} x \, dx \, dy + \int_{\frac{a}{2}}^a \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-(y-a)^2}} x \, dx \, dy \\ &= \int_a^{2a} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{a^2-(y-a)^2}} dy + \int_{\frac{a}{2}}^a \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-(y-a)^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_a^{2a} \{a^2 - (y-a)^2\} dy + \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{2}}^a \{a^2 - (y-a)^2 - a^2 + y^2\} dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ay^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_a^{2a} + \frac{1}{2} [ay^2 - a^2y]_{\frac{a}{2}}^a \\ &= \frac{1}{2} \left(4a^3 - \frac{8}{3}a^3 - a^3 + \frac{1}{3}a^3 + a^3 - a^3 - \frac{a^3}{4} + \frac{a^3}{2} \right) \\ &= \frac{11}{24}a^3 \end{aligned}$$

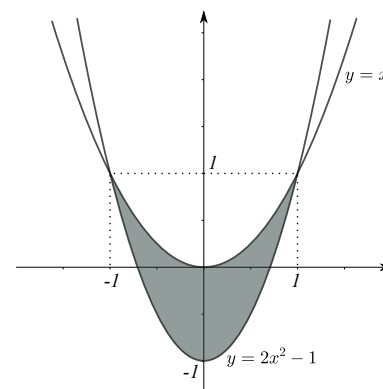
です。

□

基本演習 5 [名工大 2020] 次の 2 重積分を計算してください：

$$J = \iint_D \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2y + 4)^3}} dx dy \quad D : 2x^2 - 1 \leq y \leq x^2$$

積分範囲は下図の通りであり、



不等式で表すと

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \leq y \leq x^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

となりますから、問題の 2 重積分は次のように逐次積分に変換され、

$$J = \int_{-1}^1 \int_{2x^2-1}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{(x^2-2y+4)^3}} dy dx$$

ですが、ここで

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-2y+4}} \right) = -\frac{1}{2} (x^2-2y+4)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2) = \frac{1}{\sqrt{(x^2-2y+4)^3}}$$

によれば

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x^2-2y+4}} \right]_{2x^2-1}^{x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{6-3x^2}} \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{6-3x^2}} \right) dx \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\begin{aligned} \left\{ \sin^{-1} \frac{x}{2} \right\}' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \\ \left\{ \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \right\}' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \\ \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \right\}' &= \frac{1}{\sqrt{6-3x^2}} \end{aligned}$$

に注意すれば、

$$J = 2 \left[\sin^{-1} \frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \pi = \frac{(2-\sqrt{3})\pi}{6}$$

が得られます。

これを横切りでやろうとすると、積分範囲は

$$D_1: \begin{cases} -\sqrt{\frac{y+1}{2}} \leq x \leq -\sqrt{y} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{\frac{y+1}{2}} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad D_3: \begin{cases} -\sqrt{\frac{y+1}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{y+1}{2}} \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

と 3 つに分かれてしまいますから（被積分関数が y 軸対称であることを使えば 2 個には減らせます）こちらを選択する人はいないでしょう。

あるいは、

$$D_4: \begin{cases} -\sqrt{\frac{y+1}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{y+1}{2}} \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad D_5: \begin{cases} -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

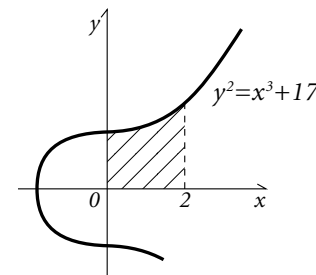
として D_4 での積分から D_5 での積分を引くという手もあります。いずれにせよ積分も難しくなります。□

基本演習 6 次の 2 重積分を計算して下さい：

$$\iint_{\begin{cases} y^2 \leq x^3 + 17 \\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \end{cases}} y \, dx dy$$

$$\begin{aligned} \iint_{\begin{cases} y^2 \leq x^3 + 17 \\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \end{cases}} y \, dx dy &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{x^3+17}} y \, dy dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{x^3+17}} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2} (x^3 + 17) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} x^4 + 17x \right]_0^2 \\ &= 19 \end{aligned}$$

この積分領域はちょっと絵が描きにくいですがこんな感じになります：



発展演習 7

$$\iint \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} 2y \, dx dy$$

この不等式はたて切りの形をしていますからそのまま累次積分に直せば

$$\begin{aligned} \iint \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} 2y \, dx dy &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2}} 2y \, dy dx \\ &= \int_0^3 [y^2]_0^{\sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2}} dx \\ &= \int_0^3 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^3 \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

となりますが、この計算は間違いです。どこが間違っているのか分かりますか？

一見さっき確認した定理 8.1 の通りに累次積分している様に見えますが、実は定理の最初の部分、

$$a \leq x \leq b \text{ において } f(x) \leq g(x) \text{ であって}$$

が成り立っていません。

具体的に書くと $0 \leq x \leq 3$ において $0 \leq \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ が成り立つかと云う部分ですが、これは成り立ちません。実はルートの中身は簡単に因数分解出来て

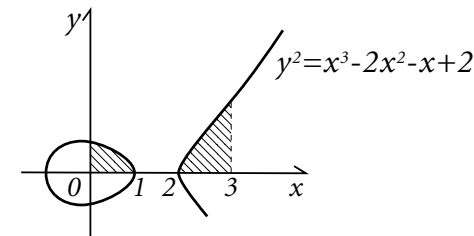
$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)(x-1)(x+1)$$

なのですが、 $1 < x < 2$ の範囲ではルートの中身が負になってしまいます。と云う事はルートをとると複素数と云う事になってしまい、不等号は成り立ちません（複素数に大小関係はありません）。

この不等式

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

を満たす実数の組 (x, y) 全体を図示すると右図の斜線部分になります：



従って、正しいたて切りの不等式は

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{または、} \quad \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

となり、2重積分が家の体積を求めることだったことを思い出せば、2つの領域それぞれの積分を計算して足せば正しい値が出て来る筈です。

正しい計算をすれば

$$\begin{aligned} &\iint \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} 2y \, dx dy \\ &= \iint \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} 2y \, dx dy \\ &\quad + \iint \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases} 2y \, dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2}} 2y \, dy dx + \int_2^3 \int_0^{\sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2}} 2y \, dy dx \end{aligned}$$

であって、計算を進めれば

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 [y^2]_0^{\sqrt{x^3-2x^2-x+2}} dx + \int_2^3 [y^2]_0^{\sqrt{x^3-2x^2-x+2}} dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx + \int_2^3 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_2^3 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{4}3^4 - \frac{2}{3}3^3 - \frac{1}{2}3^2 + 6 - \left(\frac{1}{4}2^4 - \frac{2}{3}2^3 - \frac{1}{2}2^2 + 4 \right) \\ &= \frac{3 - 8 - 6 + 24 + 3^5 - 8 \cdot 3^3 - 54 + 72 - 48 + 64 + 24 - 48}{12} \\ &= \frac{25}{6} \end{aligned}$$

となります。これが正解。絵を描いてみないと分からないものですね。

□