8　２重積分と累次積分

8.1　積分範囲に文字（積分変数）が入っている場合の順序交換

前回の基本演習２の (2) の積分を見て下さい。

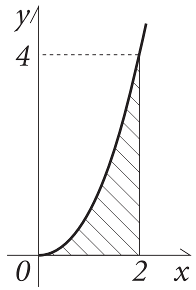
$$\int_0^2 \left\{ \int_0^{x^2} x^2 y dy \right\} dx$$

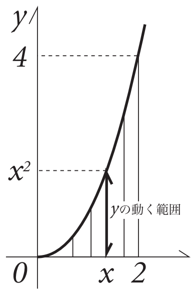
この積分を『体積の計算』だと思う事にすれば、内側の積分は元の立体を x 一定の平面で切った切り口の断面積の計算に相当していました。従ってその断面積の積分範囲である $0 \leq y \leq x^2$ が、丁度『床』を x 一定の直線で切ったときの切り口になっており、

『床』に相当する領域は

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

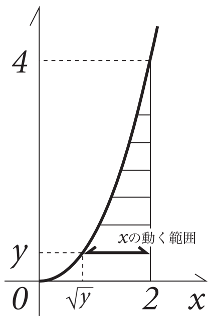
と云う不等式で表すことが出来、この領域を図示すると右図の様になっている事が分かります。





縦切りにした様子

次に切り方を変えて、いま立体を x-軸に垂直な平面群でスライスしていたのを、今度は y-軸に垂直な平面群でスライスする事を考えましょう。問題の立体を y 一定の平面で切ったとき、床もそれに応じて切られるわけですが、実際に上図の領域をある y のところで横切りにしてみると、下図の様になっていて、その切り口での x の動く範囲は $\sqrt{y} \leq x \leq 2$ となっています。更に y は $0 \leq y \leq 4$ の範囲を動きます。



横切りにした様子

以上から床に相当する領域は別の不等式：

$$\begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

で表されることになるわけです。これが領域を横切りにした場合の表現不等式です。

この様に領域を表す不等式は１通りではありません。

さて、元の立体を y-軸に垂直な平面群でスライスした場合、まず断面積は y を固定して x を $\sqrt{y} \leq x \leq 2$ の範囲で動かして積分します。そしてその結果を今度は $0 \leq y \leq 4$ で積分しますから、それは

$$\int_0^4 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^2 x^2 y dx \right\} dy$$

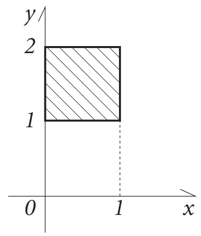
になるはずです。これを計算してみると

$$\int_0^4 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^2 x^2 y dx \right\} dy = \int_0^4 \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_{\sqrt{y}}^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^4 \left(8y - y^{\frac{5}{2}} \right) dy = \frac{1}{3} \left[4y^2 - \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} \right]_0^4 = \frac{64}{7}$$

となって (2) の積分と結果が一致しています。どうやらこれが『正しい』積分順序の交換法の様です。

8.2　積分範囲が全て定数で書けている場合

前回の基本演習２の (1) はシンプルにそのまま交換しただけで良かったと思いますが、



積分領域を不等式で書くと

$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ですからこれを図示すると左図の様な長方形になっています。これを “縦切り” にしたのが上の不等式だったわけです。

実はこの長方形は横切りにしても、ある y で切ったとき、x の動く範囲は y には依存せず $0 \leq x \leq 1$ です。従ってこの領域を横切りにした不等式は

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

であって、これはさっきの連立不等式と全く同じです。

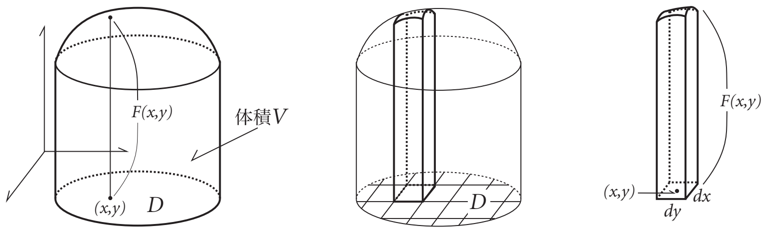
従って積分領域が（座標軸に平行な）長方形である場合は単純に順番を変えるだけでちゃんとした積分順序の交換になってくれていたんです。

8.3　２重積分

先週見たように累次積分は体積の計算に関連していました。

一般に床が領域 D で、領域 D 内の各点 (x, y) における屋根の高さが $F(x, y)$ である様な立体の体積 V は次のように計算されます。

床に座標軸に平行な線を沢山書いて細かいタイルで分割したようにし、それに応じて立体を細長い“いもけんぴ”に分割します。



このタイル１枚１枚は横 dx、縦 dy であるとすればタイル１枚の面積は $dxdy$ です。また、１本のいもけんぴは大体直方体であると思えば、その底面タイル内に点 (x,y) がある場合（３次元空間内では正確には点 $(x,y,0)$ でしょうか）その高さは大体 $F(x,y)$ ですから、大雑把に言って１本のいもけんぴの体積は $f(x,y)dxdy$ となります。

これを全てのタイルで足し合わせれば全体の体積になりますから、これを

$$V = \underbrace{\iint_D}_{\text{領域 } D \text{ 内で全て足し合わせると云う記号}} \underbrace{F(x,y)dxdy}_{\text{いもけんぴ１本の体積}}$$

と書くことにするわけです。これが２変数関数 $F(x,y)$ を領域 D で積分すると云う事で、２重積分と呼ばれています。

8.4　２重積分と累次積分の関係

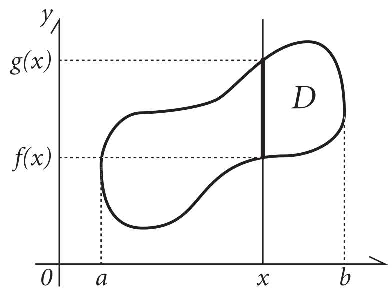
また、この同じ体積は、前回見たように立体をスライスして断面積を積分する事によって累次積分でも計算出来ましたから、結果的に（体積と云う考え方を媒介として）累次積分と２重積分が等しい事が判ります。これをまとめると次のようになります。

２変数関数 $F(x,y)$ を領域 D で２重積分する事を考えます。積分領域 D をたて切りにしたとき、切り口、すなわち y の動く範囲はどこで切るかによって違いますからそれを下図の様に $f(x) \le y \le g(x)$ としましょう。

このとき、領域 D は不等式：

$$D: \begin{cases} f(x) \le y \le g(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$$

で表され、２重積分は次の様な累次積分と等しくなります：



定理 8.1 $a \le x \le b$ において $f(x) \le g(x)$ であって、領域 D が不等式：

$$\begin{cases} f(x) \le y \le g(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$$

で表されるならば、（連続関数）$F(x,y)$ の D における２重積分 $\iint_D F(x,y)dxdy$ は次の累次積分に等しい：

$$\iint_D F(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy \right\} dx.$$

全く同様に横切りにして累次積分に帰着させる事も出来ます

定理 8.2 $c \le y \le d$ において $v(y) \le w(y)$ であって、領域 D が不等式：

$$\begin{cases} v(y) \le x \le w(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$$

で表されるならば、（連続関数）$F(x,y)$ の D における２重積分 $\iint_D F(x,y)dxdy$ は次の累次積分に等しい：

$$\iint_D F(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{v(y)}^{w(y)} F(x,y)dx \right\} dy.$$

基本演習 1 [教科書問題 8.1] そのままの順序と順序交換をしたものを計算して下さい。

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_0^{x^2} (x^2+2y)dy\right\} dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^2 \left\{\int_{-x}^{x} x^2y^2dy\right\} dx$

事実 8.3 積分領域 D が交わらない（境界線を共有するのは構いません）２つの領域 D_1, D_2 の和集合になっているとき（これを $D = D_1 \cup D_2$ などと書きます)、D での関数 $F(x,y)$ の２重積分はそれぞれの領域での積分の和になります：

$$\begin{aligned}\iint_D F(x,y)\,dxdy &= \iint_{D_1\cup D_2} F(x,y)\,dxdy \\ &= \int_{D_1} F(x,y)\,dxdy + \int_{D_2} F(x,y)\,dxdy.\end{aligned}$$

Exercise

基本演習 2 [教科書問題 8.2] 次の２重積分を２通りの積分順序で累次積分にして計算して下さい。

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy, \quad D: 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 3$

(2) $\displaystyle\iint_D (1-x-y)\,dxdy, \quad D: x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1$

(3) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy, \quad D:\ x \ge 0, y \ge 0, x^2+y^2 \le 4$

(4) $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{x-y}\,dxdy, \quad D: 0 \le x \le 1, x \le y \le 1$

基本演習 3 [問題集 8.2(4)] 次の累次積分の積分順序を交換して計算して下さい：

$$\int_0^1\int_x^{2x} 2x^2y\,dydx.$$

基本演習 4 [問題集 8.11(4)] $a > 0$ の時に次の２重積分をたて切り・よこ切りの２通りの累次積分に直して計算して下さい：

$$\iint_D x\,dxdy, \qquad D: \begin{cases} a^2 \le x^2+y^2 \le 2ay \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

基本演習 5 [名工大 2020] 次の２重積分を計算してください：

$$J = \iint_D \frac{1}{\sqrt{(x^2-2y+4)^3}}dxdy \qquad D: 2x^2-1 \le y \le x^2$$

基本演習 6 次の２重積分を計算して下さい：

$$\iint_{\begin{cases} y^2 \le x^3+17 \\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \end{cases}} y\,dxdy$$

発展演習 7 次の２重積分を計算してください：

$$\iint_{\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{x^3-2x^2-x+2} \\ 0 \le x \le 3 \end{cases}} 2y\,dxdy.$$