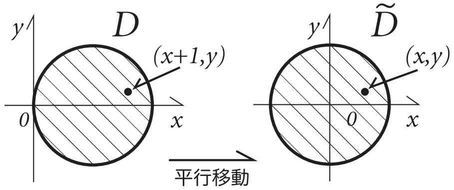
9　平行移動と極座標変換

9.1　平行移動

問題 9.1　$J = \iint_{x^2+y^2 \leq 2x} x\,dxdy.$

まず積分領域（D とします）ですが、不等式を変形すると右の様になりますからこれは下図左の様な中心がずれた円の内部です。

$$x^2+y^2 \leq 2x$$
$$x^2-2x+y^2 \leq 0$$
$$(x-1)^2+y^2 \leq 1$$



この積分をそのまま領域のたて切り・よこ切りによって計算することも可能ですが、今日は一寸違ったやり方でやってみましょう。

最初の日に言ったように、２重積分とはつまり家の体積の様なものでした。当たり前のことですが家をごっそり平行移動によって引っ越ししたとしてもその体積は変りませんね。そこでこの“家”を床の中心が原点に来るように平行移動してみましょう。

床（＝積分領域）は $\tilde{D} : x^2+y^2 \leq 1$ になりますが、ちゃんと屋根も平行移動しなければいけません。移動前の点 (x,y) における屋根の高さ（＝被積分関数の値）を $F(x,y)$ とします。そして移動後の点 (x,y) での屋根の高さを $\tilde{F}(x,y)$ とすると、これは移動前の点 $(x+1,y)$ での屋根の高さに等しいことが分かります（上図参照）。

平行移動しても家の体積は変りませんから $\iint_D F(x,y)dxdy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{F}(x,y)dxdy$ であって、

$$J = \iint_{\tilde{D}} F(x+1,y)dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x+1)dxdy$$

となる事が分かります。

9.2　変数変換という見方

事の次第は、まあ、そんなところなのですが、例えばこれを他所様で試験問題の解答として書くのは如何なものか。単に積分せよと問うている問題の解答に、『屋根の高さ』『家の体積』などと書くのは如何にも憚られる事でございます。もう少しよそ行きの言葉で書いた方が良いですね。

元々の積分領域 D を表す不等式は $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ でしたが、ここで $x-1=v, y=w$ と置けばこれは $v^2+w^2 \leq 1$ と書くことが出来るようになります。この様に『変数 x, y を v, w に変換する』と考えて記述した方がスマートになります。

１変数の場合、変数変換をする時には３つの事『積分範囲、被積分関数、dx と dv の関係』に注意しなければなりませんでした。

仲でも一番難しい（考え方として）のが dx と dv の関係ですが、例えば変換式が $2x^2+1=v$ なら、この両辺を x で微分して $4x = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ となりますが、これを象徴的に“$4xdx = dv$”と書きましたよね？

これと同じ事を２変数で考えると『$dxdy$ と $dvdw$ の関係』と云うことになります。

１変数で $4xdx = dv$ としたのは、x が１増えると v も１増えるわけではなく、２つの変数 x, v にはスケールの違いがあったためです。物差しの目盛が違うと言っても良いですね。そのスケーリングの違いを整合させる為に単に $dx = dv$ とするのではなく $4xdx = dv$ として調節をしているのです。有り体に言えば微小幅 dv は微小幅 dx の $4x$ 倍の幅をもっていると云う事なのです。この調整用の関数の事をヤコビアンと言います。

そこで今回の２変数の場合を考えてみれば、今回も $dxdy$ と云う微小面積と $dvdw$ という微小面積のスケールの違いが問題になるはずですが、今回の変換は平行移動であって、変数のスケールは変化しません。従って平行移動のヤコビアンはいつも１です。

そこで解答では『平行移動のヤコビアンは１なので“$dxdy = dvdw$”が成り立つから・・・』あるいは『被積分関数と積分領域を平行移動しても積分の値は変らないので』などと書くと良いでしょう。

【解答例（変数変換として）】$x-1=v, y=w$ という変数変換（平行移動）をすれば、積分領域 D は $v^2+w^2 \leq 1$ に変換され、また被積分関数は $x = v+1$ となり、平行移動しても積分値は変らないので

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_{v^2+w^2 \leq 1} (v+1)dvdw$$

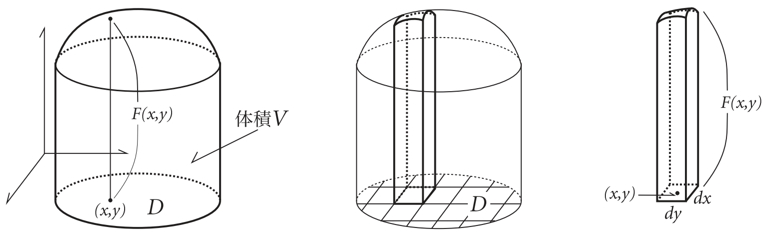
を得る。

9.3　床のタイルの貼替え

平行移動して円の中心が原点になったところからスタートしましょう。

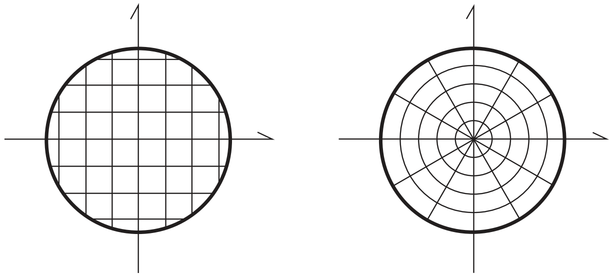
問題 9.2　$J = \iint_{\tilde{D}} \tilde{F}(x,y)dxdy = \iint_{x^2+y^2 \le 1} (x+1)dxdy$

いままでのやり方だと床を座標軸に平行な格子状に区切って（格子状のタイルを貼った様な感じ）それに応じて家の内部を細長い“いもけんぴ”に分割して（千切りにした様な感じ）１本１本の体積を計算してからそれらを全部足し合わせて家の体積を計算していました。



しかし床の区切り方はどんな風であっても良いはずで、それに応じて１本１本計算していけば全体の体積は計算出来ます。

そこで今日は床のタイルの模様替えをしてみましょう。



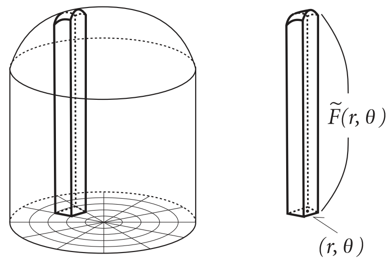
今までの床のタイル　　新しい床のタイル

床が折角丸い形をしているのですから貼るタイルも四角いものではなくて円にあったものにしてみようと云う事です。

そしてこの床の分割に応じて家の内部を千切りにして、１本１本の“いもけんぴ”の体積を計算してみましょう。

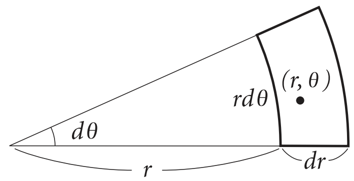
この様なタイルの貼り替えをして大きく変わるのは点（あるいはある点を含むタイル）の指定の仕方です。格子状に分割していた時は点はその xy-座標 (x,y) によって指定されましたが、同心円状に分割された場合には極座標が最適です。

そこで家の床のタイル貼りの話に戻って、点 (r,θ) を含む微小タイルを考えてみましょう。このタイルを底面にもつ“いもけんぴ”の体積を求めるにはこのタイルの微小面積と点 (r,θ) での屋根の高さが分かればオッケーです。



底面の面積は後回しにして屋根の高さですが、デカルト座標で (x,y) で表される点での屋根の高さは $\tilde{F}(x,y) = x+1$ と分かっていました。この極座標で表された点 (r,θ) はデカルト座標では $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で表されますからここでの屋根の高さは $\tilde{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta + 1$ です。

9.3.1　タイル１枚の微小面積



r の微小変位 dr と θ の微小変位 $d\theta$ に対応した１枚の微小タイルの絵をちょっと誇張して描けば左図のようになって居り、その面積は大体長方形だと考えて $rdrd\theta$ です。これが極座標による基本的な微小面積になります。ここに現れる r が極座標変換におけるヤコビアンです。

従って１本の体積は $\tilde{F}(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta = (r\cos\theta+1)rdrd\theta$ となります。

9.3.2　どの範囲で足し合わせるのか

後はこの“いもけんぴ”の体積を全ての点 (r,θ) について足し合わせれば家の体積が復元されるのですが、果たして r,θ は『どの範囲で』足し合わせれば良いのでしょうか？つまり、積分領域（今は平行移動後の $\tilde{D}$ ですね）を r,θ で表した時どんな不等式になるかをきちんと見ておかねばなりません。

通常のデカルト座標で領域を（x,y の）不等式で表すときに『たて切り／よこ切り』の方法でやりましたが、今回も同じような考え方で行きます。

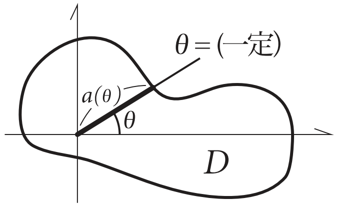
便宜上『たて切り』と呼んでいたものはすなわち x の値を固定して、$x =$（一定）と云う直線で（その領域を）切って考える事ですからこれを『x 切り』と呼ぶ事にすれば、

こう云ったものの代りに『r 切り』『θ 切り』をすれば良いのです。

たて切り／よこ切りどちらでも良かった様に本来は『r 切り』／『θ 切り』どちらでも良いのですが多くの場合『θ 切り』の方が上手くいきますのでこちらを説明しましょう。

『θ 切り』では『$\theta =$（一定)』という“直線”で切って考えますが、$\theta =$（一定）と云う図形はいわゆる直線にはなりませんので注意が必要です。

右図の領域 D があった時に、ある θ の値を固定して丁度 θ がその値になっている様な点 (r, θ) 全体からなる曲線を図に書き入れます。これは直線ではなく半直線になりますね。そしてその半直線と領域 D が重なっている部分に注目し、それが r で測ってどういう範囲であるかを見るわけです（下の図では $0 \leq r \leq a(\theta)$ の範囲になっていますね)。これを全ての $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に対して行うわけです。



この方法で問題の積分領域 $\tilde{D}$、即ち、原点中心半径 1 の円を『θ 切り』してみると、どの角度で切っても r の範囲は $0 \leq r \leq 1$ となりますから、結局この領域は不等式：

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

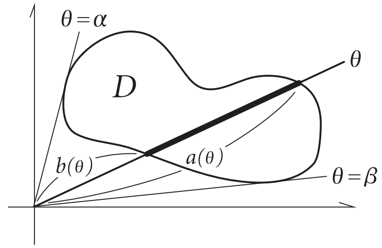
で表される事が分かりました（これは長方形ですね)。以上から、件の重積分は

$$\begin{aligned}
J &= \iint_{\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}} (r\cos\theta + 1) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(r\cos\theta + 1)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}r^3\cos\theta + \frac{1}{2}r^2\right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{2}\right) d\theta \\
&= \left[\frac{1}{3}\sin\theta + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

と計算されます。

9.4 極座標による領域の不等式表現

原点から角度 θ に相当する半直線を引き、領域と重なる部分が原点からの距離 r で測ってどの範囲であるかを見ます。



どの角度で切るかによってその範囲は異なるはずですが、上の図の様に丁度 $b(\theta) \leq r \leq a(\theta)$ の範囲になっていたとしましょう。更に角度 θ の半直線が領域と交わるのは $\beta \leq \theta \leq \alpha$ の範囲です。従ってこの領域を r と θ の不等式で表現すれば

$$\begin{cases} b(\theta) \leq r \leq a(\theta) \\ \beta \leq \theta \leq \alpha \end{cases}$$

となります。

Exercise

基本演習 1 次の各領域を図示し、更に極座標による不等式で表現して下さい。

(1) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$　(2) $x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y$

(3) $x^2 + y^2 \leq x$　(4) $x^2 + y^2 \leq 2y$

(5) $x \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y$　(6) $1 \leq x^2 + y^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y$

(7) $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}$　(8) $x^2 + y^2 \leq 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq y$

発展演習 2 中心が $(1, 1)$ で半径が 1 の円の内部領域を $D : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ としたとき、この領域は r と θ でどんな不等式で表されるでしょうか。

発展演習 3 不等式 $x^2 \leq y$ の表す領域 D を極座標で表してください。

9.5 Exercise 解答例

基本演習 1 次の各領域を図示し、更に極座標による不等式で表現して下さい。

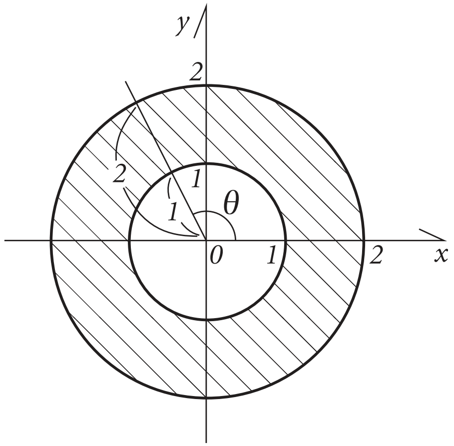
(1) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$　(2) $x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y$

(3) $x^2 + y^2 \leq x$　(4) $x^2 + y^2 \leq 2y$

(5) $x \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y$　(6) $1 \leq x^2 + y^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y$

(7) $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}$　(8) $x^2 + y^2 \leq 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq y$

(1)

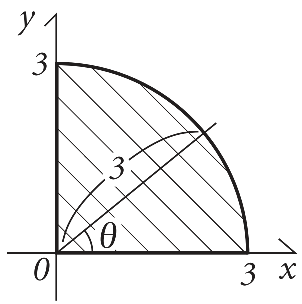


この領域は図の様なドーナツ領域であり、どの θ で切っても r の範囲は常に $1 \leq r \leq 2$ です。したがって不等式で表すと

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

となります。

(2)

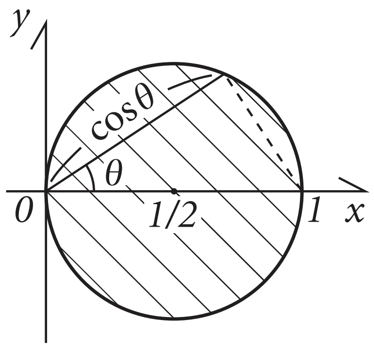


この領域は４分の１円で、不等式表現は

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

となります。

(3)

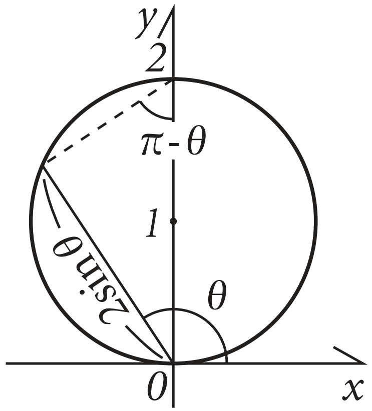


この領域は図の通りの中心のずれた円で、直径に対応した円周角が $\frac{\pi}{2}$ である事に注意すれば θ で切った時の弦の長さは $\cos\theta$ になり、領域の不等式表現は

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq \cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

となります。

(4)



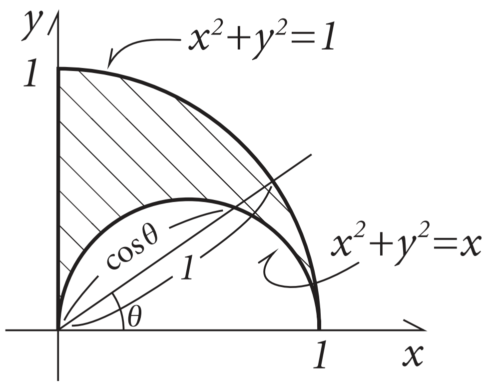
これも中心のずれた円ですが、$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ に注意すれば図の通り θ で切った時の弦の長さは $2\sin\theta$ です（$\theta < \frac{\pi}{2}$ のときは図中の $\pi - \theta$ の角のところが θ そのものになっています）。

従ってこの領域の不等式表現は

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2\sin\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

となります。

(5)

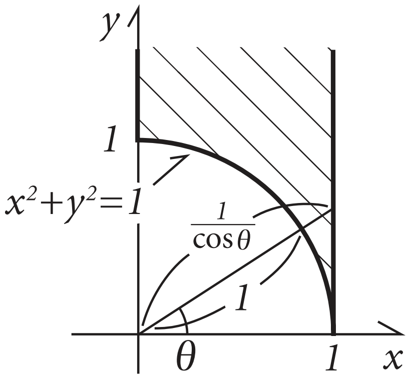


この領域は図の通りであり、(3) の結果を援用すれば不等式表現は

$$\begin{cases} \cos\theta \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

となる事が分かります。

(6)

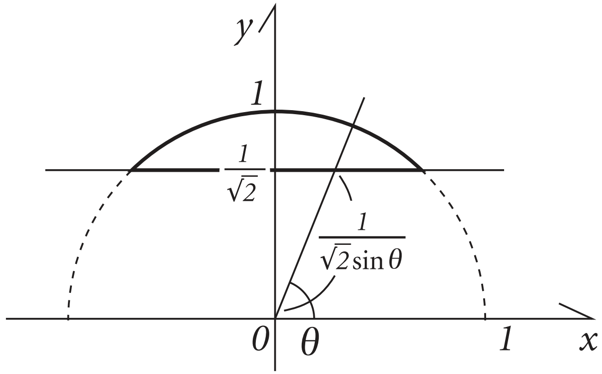


この領域は図の通りであり、不等式表現は

$$\begin{cases} 1 \le r \le \frac{1}{\cos\theta} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

となります。

(8)

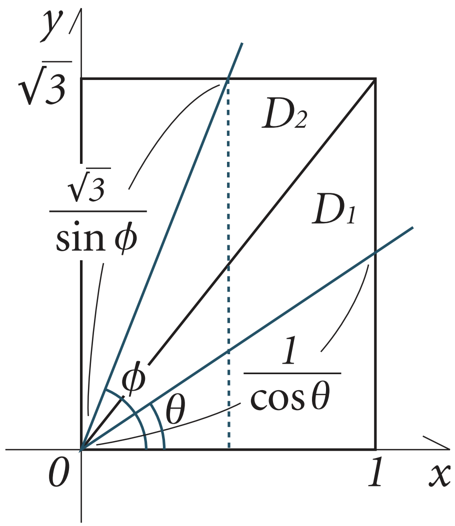


領域は図の通りで、(7) と同様に考えれば不等式は

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta} \le r \le 1 \\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

です。

(7) 領域が長方形であることは自明ですが、この不等式表現は結構面倒ですね。



対角線のライン（これは角度 $\theta = \frac{\pi}{3}$ に相当します）で２つの領域 D_1, D_2 に分割してそれぞれの不等式表現を求めると、

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} 0 \le r \le \frac{\sqrt{3}}{\sin\theta} \\ \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

となりますね。

発展演習 2 中心が $(1,1)$ で半径が 1 の円の内部領域を $D : (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$ としたとき、この領域は r と θ でどんな不等式で表されるでしょうか。

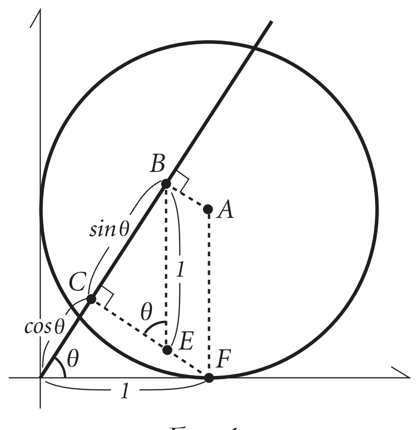


Fig. 1

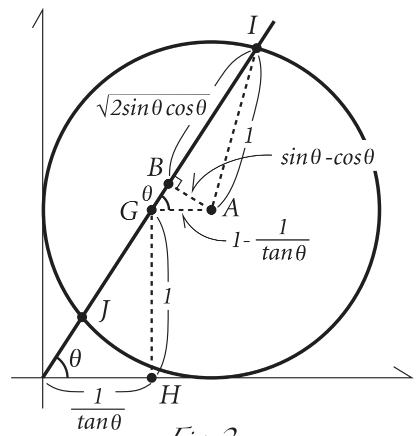


Fig.2

まず上図左のように θ 一定の半直線を引いて、円の中心 A から垂線を下ろしその足を B とします。中心 A からは x-軸へも垂線を下ろしその足を F とします。また図のように点 F から θ 一定の半直線へ垂線を下ろし、その足を C とします。更に線分 FC の上に、AF と BE が平行になるように点 E をとります。

すると図のように $\overline{OC} = \cos\theta$、$\overline{BC} = \sin\theta$ である事が判り、結果的に $\overline{OB} = \cos\theta +$

$\sin\theta$ となっています。実は θ 一定の半直線が円周と交わる２点を上図右のように I, J とすると、弦 IJ の中点が B に他なりません。

円の中心 A から x-軸に平行に直線を引いて θ 一定の半直線と交わった点を G とし、図のように直角三角形 OHG を考えると、$\overline{OH}+\overline{GA}=1$ である事に注意して $\overline{GA}=1-\frac{1}{\tan\theta}$ が得られます。すると $\angle BGA=\theta$ なので

$$\overline{AB}=\sin\theta\left(1-\frac{1}{\tan\theta}\right)=\sin\theta-\cos\theta$$
$$\overline{IB}=\sqrt{1-(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sqrt{2\cos\theta\sin\theta}$$

が得られますから、結局、領域 D は連立不等式：

$$D:\begin{cases}\cos\theta+\sin\theta-\sqrt{2\cos\theta\sin\theta}\leq r\leq\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{2\cos\theta\sin\theta}\\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

で表される事が判ります。

この様に純粋に幾何学的に求めてやろうとすると結構大変ですが（それなりに面白い事は認めますが)、円周を r, θ で表してやって、θ を定数と考えて r について解けば θ 一定の半直線との２交点の『r-座標』が出て来る筈ですよね。

実際やってみると、円周は $(r\cos\theta-1)^2+(r\sin\theta-1)^2=1$ であり、

$$\begin{aligned}(r\cos\theta-1)^2+(r\sin\theta-1)^2&=1\\ r^2\cos^2\theta-2r\cos\theta+1+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1&=1\\ r^2-2(\cos\theta+\sin\theta)r+1&=0\\ \{r-(\cos\theta+\sin\theta)\}^2-(\cos\theta+\sin\theta)^2+1&=0\\ \{r-(\cos\theta+\sin\theta)\}^2&=2\cos\theta\sin\theta\\ r&=\cos\theta+\sin\theta\pm\sqrt{2\cos\theta\sin\theta}\end{aligned}$$

ですから全く同じ結果ですね！こちらの方が簡単ですよ。 □

発展演習 3 不等式 $x^2\leq y$ の表す領域 D を極座標で表してください。

放物線の方程式を r, θ で表すと

$$0=r^2\cos^2\theta-r\sin\theta=r\left(r\cos^2\theta-\sin\theta\right)$$

ですが、ここで θ は定数だと思えば、$0\leq\theta\leq\pi,\ \theta\neq\frac{\pi}{2}$ のとき、$r=0, \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ が得られます。

従って領域 D は

$$\begin{cases}0\leq r\leq\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\\ 0\leq\theta<\frac{\pi}{2}\end{cases}\bigcup\begin{cases}0\leq r\\ \theta=\frac{\pi}{2}\end{cases}\bigcup\begin{cases}0\leq r\leq\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\\ \frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi\end{cases}$$

と表されます。 □