

10 極座標変換による 2 重積分の計算

10.1 変数変換として記述する方法

前回の問題を、平行移動はせずに最初から極座標でやってみるとどうなるでしょうか。

例題 10.1 [教科書問題 8.4(3)]

$$J = \iint_{x^2+y^2 \leq 2x} x \, dx \, dy$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置いて極座標に変換して計算する事にします。

積分領域は既に見た様に中心のずれた円：

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

ですから、これを θ 切りすると、左図の様に各 θ に対して領域と重なる r の範囲は

$$0 \leq r \leq 2 \cos \theta$$

です。また θ の範囲は $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (等号は付けない方が良いかな？皆さんはどう思いますか) です。

従ってこの積分領域 D は次の不等式で表現されます：

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \cos \theta \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

また、被積分関数は $x = r \cos \theta$ となり、更にこの極座標変換では $dx \, dy = r \, dr \, d\theta$ である事から題意の 2 重積分は

$$J = \iint_{\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \cos \theta \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta$$

となるのでこれを計算してゆけば

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^{2 \cos \theta} \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta \end{aligned}$$

ですが、倍角の公式を 2 回使えば $4 \cos^4 \theta = \frac{1}{2} \cos 4\theta + 2 \cos 2\theta + \frac{3}{2}$ が分かりますから

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} \cos 4\theta + \frac{4}{3} \cos 2\theta + 1 \right) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{12} \sin 4\theta + \frac{2}{3} \sin 2\theta + \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi \end{aligned}$$

となります。

□

特に注意すべきなのは $dx \, dy$ と $r \, dr \, d\theta$ の関係のところをどう記述するかです。正確にはヤコビアンと呼ばれるものを使って記述しなければなりませんが、この講義ではヤコビアンの定義はきちんとやっていません。でも、まあ、ここをきちんとやろうとするとかなり煩雑になりますから興味のある人は他の教科書等で勉強していただく事にして、多くの人は、床のタイルの貼り替えのところで見た様な 1 枚の微小タイルの面積がどうなるのかと云うところを思い出してもらって、ある種のおまじないか何かの様に

極座標変換：

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

においては

$$“dx \, dy = r \, dr \, d\theta”$$

である事から

などと書いていただければ十分でしょう。

10.2 the Gaussian integral

例題 10.2 広義積分 $J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ を計算して下さい。

通常定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は、被積分関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を使って

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

として計算されます。しかし問題の被積分関数の原始関数がどうしても求められません。

実は e^{-x^2} の原始関数は、皆さんの知っている範囲の数学／言語では書き表す事が出来ないもの凄く難しい関数であり、問題の定積分は通常のやり方では計算出来ません。そこで次の様なアクロバティックなやり方が登場します。

まずこの積分は正確には広義積分ですから、

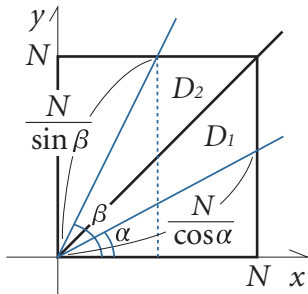
$$J_N = \int_0^N e^{-x^2} dx$$

として $\lim_{N \rightarrow \infty} J_N = J$ です。この J_N を自乗すると、一方の積分変数を y にして

$$J_N^2 = \left\{ \int_0^N e^{-x^2} dx \right\}^2 = \int_0^N e^{-x^2} dx \int_0^N e^{-y^2} dy = \int_0^N \left\{ \int_0^N e^{-(x^2+y^2)} dx \right\} dy$$

となって累次積分の計算に帰着されます。

この累次積分をこのままやったのでは元に戻ってしまいますから極座標に変換してみましょう。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置けば、積分領域 D は図の様に 2 つに分けて



$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{N}{\cos \theta} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}, \quad D_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{N}{\sin \theta} \\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

と書けますから、この極座標変換では $dx dy = r dr d\theta$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned} J_N^2 &= \iint_{D_1} r e^{-r^2} dr d\theta + \iint_{D_2} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{N}{\cos \theta}} r e^{-r^2} dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{N}{\sin \theta}} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\frac{N}{\cos \theta}} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\frac{N}{\sin \theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - e^{-\frac{N^2}{\cos^2 \theta}} \right) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - e^{-\frac{N^2}{\sin^2 \theta}} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{N^2}{\cos^2 \theta}} d\theta - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{N^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{N^2}{\cos^2 \theta}} d\theta - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{N^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \end{aligned}$$

となります。また

$$e^{-\frac{N^2}{\cos^2 \theta}} \leq e^{-N^2}, \quad e^{-\frac{N^2}{\sin^2 \theta}} \leq e^{-N^2}$$

に注意すれば、最後に残っていた 2 つの積分は

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{N^2}{\cos^2 \theta}} d\theta \right| &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-N^2} d\theta = \frac{\pi}{8} e^{-N^2} \rightarrow 0 \\ \left| -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{N^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-N^2} d\theta = \frac{\pi}{8} e^{-N^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となって 0 に収束しますから結局 $\lim_{N \rightarrow \infty} J_N^2 = \frac{\pi}{4}$ が分かります。これは $J^2 = \frac{\pi}{4}$ を意味しますから $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ が得られました。□

最終的に（極限をとるわけですね）第 1 象限での重積分を計算していますから、近似領域の取り方を正方形から 4 分の 1 円に変更して計算するやり方もあり、計算自体はこちらの方が簡単になります。

またこれを体積計算だと考えてしまえば、床が xy -平面全体、屋根の高さが $e^{-(x^2+y^2)}$ である家の体積を計算して 4 で割れば良い事になります。

この家を xy -平面に平行な平面群でスライスして 1 枚 1 枚の体積を計算して足す方法で計算すれば、高さ z でのスライスは半径 $\sqrt{-\log z}$ 、厚さ dz の極薄い円柱ですから、

$$(\text{体積}) = \int_0^1 (-\pi \log z) dz = -\pi [z \log z - z]_0^1 = \pi$$

がわかり、この 4 分の 1 が J^2 でしたからさっきと同じ答えに辿り着きます。

Exercise

基本演習 1 [教科書問題 8.4] 次の重積分を極座標になおして求めて下さい。

$$(1) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 dx dy \quad (2) \iint_{x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0} xy dx dy$$

基本演習 2 次の 2 重積分を極座標に変換して計算して下さい。

$$(1) \iint_{\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}} (x + y) dx dy$$

$$(2) \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 4} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

$$(3) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 y^2 dx dy$$

$$(4) \iint_{x^2+y^2 \leq x} \sqrt{x} dx dy$$

$$(5) \iint_{(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 1} xy dx dy$$

基本演習 3 [名工大 2021] 次の 2 重積分を計算してください：

$$J = \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2+1} dx dy \quad D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

発展演習 4 次の 2 重積分をそのまま逐次積分で計算した結果と、極座標に変換して計算した結果を比べて下さい（結果の数値は同じですが計算過程の様子は違うはずです）。

$$\iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

10.3 Exercise 解答例

基本演習 1 [教科書 問題 8.4] 次の重積分を極座標になおして求めて下さい。

$$(1) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 dx dy \quad (2) \iint_{x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0} xy dx dy$$

【解答例】 (1) $x = p \cos t, y = p \sin t$ とおき極座標に変換して計算します。

このとき積分領域である単位円は不等式 $0 \leq p \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi$ で表されます。また被積分関数は $x^2 = p^2 \cos^2 t$ となり、この変換では $dx dy = p dp dt$ ですから、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 p^3 \cos^2 t dp dt &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} p^4 \right]_0^1 \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (\cos 2t + 1) dt \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \sin 2t + t \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

が得られます。

(2) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置けば積分領域は $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ と書け、被積分関数は $xy = r^2 \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$ です。

更にこの極座標変換においては $dx dy = r dr d\theta$ なので題意の積分は

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^3 \sin 2\theta d\theta dr = \int_0^2 \frac{1}{2} r^3 \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^2 \frac{1}{2} r^3 dr = \left[\frac{1}{8} r^4 \right]_0^2 = 2$$

となります。

□

基本演習 2 (1) $\iint_{\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}} (x+y) dx dy$

【解答例】 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおけば積分領域は不等式：

$$\begin{cases} 0 < r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

で表され、この極座標変換では $dx dy = r dr d\theta$ なので、

$$\begin{aligned} \iint_{\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}} (x+y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3 (\cos \theta + \sin \theta) \right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{3} [\sin \theta - \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となります。

□

$$(2) \iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

【解答例】 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおけば、積分領域は不等式：

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

で表され、この極座標変換では $dx dy = r dr d\theta$ なので、

$$\iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_1^2 \frac{1}{r} dr = 2\pi \log 2$$

です。

□

$$(3) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 y^2 dx dy$$

【解答例】 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおけば積分領域は不等式：

$$\begin{cases} 0 < r \leq 1 \\ 0 < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

で表され、この極座標変換では $dx dy = r dr d\theta$ なので、

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 y^2 dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{6} r^6 \right]_0^1 \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(1 - 2 \sin^2 2\theta\right) \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 4\theta + \frac{1}{2} \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{48} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

ですね。

□

$$(4) \iint_{x^2+y^2 \leq x} \sqrt{x} dx dy$$

【解答例】 積分領域は円： $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ なのでそのまま極座標でやってみましょう。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

とおけば、積分領域は不等式：

$$\begin{cases} 0 < r \leq \cos \theta \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

で表され、この極座標変換では $dx dy = r dr d\theta$ なので、

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq x} \sqrt{x} dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} \sqrt{r \cos \theta} r dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} \int_0^{\cos \theta} r \sqrt{r} dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \theta} \left[\frac{1}{\frac{3}{2} + 1} r^{\frac{3}{2} + 1} \right]_0^{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{2}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{5} \left[\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{5} \left\{ 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right\} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

です。

□

$$(5) \iint_{(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 1} xy \, dx dy$$

【解答例】 被積分関数を f とします。平行移動しても積分の値は変わらないので、

$$x - 2 = v, \quad y - 1 = w$$

と置けば、平行移動後の積分領域は $v^2 + w^2 \leq 1$ となり、また平行移動後の被積分関数 $\tilde{f}(v, w)$ は

$$\tilde{f}(v, w) = f(v + 2, w + 1) = (v + 2)(w + 1)$$

となるので、

$$\iint_{(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 1} xy \, dx dy = \iint_{v^2+w^2 \leq 1} (v+2)(w+1) dv dw$$

です。ここで $v = r \cos \theta$, $w = r \sin \theta$ と極座標変換すれば、積分領域は r と θ の不等式：

$$\begin{cases} 0 < r \leq 1 \\ 0 < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

で表され、この極座標変換では $dx dy = r dr d\theta$ なので

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \theta + 2)(r \sin \theta + 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 \cos \theta \sin \theta + r^2 \cos \theta + 2r^2 \sin \theta + 2r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{3} r^3 \cos \theta + \frac{2}{3} r^3 \sin \theta + r^2 \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{3} \cos \theta + \frac{2}{3} \sin \theta + 1 \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \cos \theta + \frac{2}{3} \sin \theta + 1 \right) d\theta \\ &= \left[-\frac{1}{16} \cos 2\theta + \frac{1}{3} \sin \theta - \frac{2}{3} \cos \theta + \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

が得られます。

□

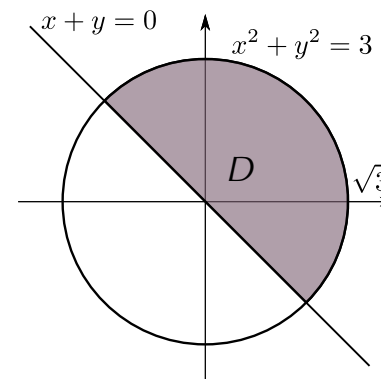
基本演習 3 [名工大 2021] 次の 2 重積分を計算してください：

$$J = \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2+1} dx dy \quad D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

極座標に変換すれば

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r(\cos \theta + \sin \theta)}{r^2 + 1} r \cdot dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^2}{r^2 + 1} dr \\ &= [\sin \theta - \cos \theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+r^2} \right) dr \\ &= 2\sqrt{2} [r - \tan^{-1} r]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{6} - \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

です。



基本演習 4

$$\iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

【解答例その1 そのまま逐次積分で】

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{1}{2} \left\{ x \sqrt{x^2 + A} + A \log |x + \sqrt{x^2 + A}| \right\}$$

によれば、

$$\begin{aligned} & \iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_0^\pi \left\{ \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2} dx \right\} dy \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 \log |x + \sqrt{x^2 + y^2}| \right]_0^1 dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left\{ \sqrt{1 + y^2} + y^2 \log |1 + \sqrt{1 + y^2}| - y^2 \log |y| \right\} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sqrt{1 + y^2} dy + \frac{1}{2} \int_0^\pi y^2 \log (1 + \sqrt{1 + y^2}) dy - \frac{1}{2} \int_0^\pi y^2 \log y dy \end{aligned}$$

ですが、右辺の3つの積分を J_1, J_2, J_3 とすれば、

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sqrt{1 + y^2} dy \\ &= \frac{1}{4} \left[y \sqrt{1 + y^2} + \log |y + \sqrt{1 + y^2}| \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \pi \sqrt{1 + \pi^2} + \log (\pi + \sqrt{1 + \pi^2}) \right\} \\ J_3 &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi y^2 \log y dy \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{3} y^3 \log y \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{3} y^3 \frac{1}{y} dy \right\} \\ &= -\frac{1}{6} \pi^3 \log \pi + \frac{1}{6} \int_0^\pi y^2 dy \\ &= -\frac{1}{6} \pi^3 \log \pi + \frac{1}{18} \pi^3 \end{aligned}$$

です。残りの J_2 は、部分積分して

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi y^2 \log (1 + \sqrt{1 + y^2}) dy \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{3} y^3 \log (1 + \sqrt{1 + y^2}) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{3} y^3 \frac{1}{1 + \sqrt{1 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} dy \right\} \\ &= \frac{1}{6} \pi^3 \log (1 + \sqrt{1 + \pi^2}) - \frac{1}{6} \int_0^\pi \frac{y^4}{\sqrt{1 + y^2} + 1 + y^2} dy \end{aligned}$$

です。ここで右辺の積分を J_4 として、更に $\sqrt{1 + y^2} = t - y$ と置換すれば、

$$1 + y^2 = (t - y)^2$$

$$1 = t^2 - 2ty$$

$$y = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

$$\sqrt{1 + y^2} = t - y = t - \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t(2t) - (t^2 - 1)2}{4t^2} = \frac{t^2 + 1}{2t^2}$$

から、

$$\begin{aligned} J_4 &= -\frac{1}{6} \int_0^\pi \frac{y^4}{\sqrt{1 + y^2} + 1 + y^2} dy \\ &= -\frac{1}{6} \int_1^{\pi + \sqrt{1 + \pi^2}} \frac{\frac{(t^2 - 1)^4}{(2t)^4}}{\frac{t^2 + 1}{2t} + \frac{(t^2 + 1)^2}{(2t)^2}} \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt \\ &= -\frac{1}{6} \int_1^{\pi + \sqrt{1 + \pi^2}} \frac{(t - 1)^4 (t + 1)^2}{8t^4} dt \\ &= -\frac{1}{48} \int_1^{\pi + \sqrt{1 + \pi^2}} \frac{t^6 - 2t^5 - t^4 + 4t^3 - t^2 - 2t + 1}{t^4} dt \\ &= -\frac{1}{48} \int_1^{\pi + \sqrt{1 + \pi^2}} \left(t^2 - 2t - 1 + \frac{4}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^4} \right) dt \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{48} \left[\frac{1}{3} t^3 - t^2 - t + 4 \log t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{3t^3} \right]_1^{\pi + \sqrt{1+\pi^2}} \\
 &= -\frac{1}{12} [\log t]_1^{\pi + \sqrt{1+\pi^2}} - \frac{1}{48} \left[\frac{1}{3} (t^3 - t^{-3}) - (t^2 - t^{-2}) - (t - t^{-1}) \right]_1^{\pi + \sqrt{1+\pi^2}} \\
 &= -\frac{1}{12} \log (\pi + \sqrt{1+\pi^2}) \\
 &\quad - \frac{1}{48} \left[(t - t^{-1}) \left\{ \frac{1}{3} (t^2 + 1 + t^{-2}) - (t + t^{-1}) - 1 \right\} \right]_1^{\pi + \sqrt{1+\pi^2}}
 \end{aligned}$$

となりますが、 $T = \pi + \sqrt{1+\pi^2}$ としたとき、

$$T^{-1} = \frac{1}{\pi + \sqrt{1+\pi^2}} = \sqrt{1+\pi^2} - \pi$$

なので、

$$T - T^{-1} = 2\pi, \quad T^2 + 1 + T^{-2} = 4\pi^2 + 3, \quad T + T^{-1} = 2\sqrt{1+\pi^2}$$

がわかり、従って

$$\begin{aligned}
 J_4 &= -\frac{1}{12} \log (\pi + \sqrt{1+\pi^2}) - \frac{1}{48} \left[(t - t^{-1}) \left\{ \frac{1}{3} (t^2 + 1 + t^{-2}) - (t + t^{-1}) - 1 \right\} \right]_1^T \\
 &= -\frac{1}{12} \log (\pi + \sqrt{1+\pi^2}) - \frac{1}{48} (T - T^{-1}) \left\{ \frac{1}{3} (T^2 + 1 + T^{-2}) - (T + T^{-1}) - 1 \right\} \\
 &= -\frac{1}{12} \log (\pi + \sqrt{1+\pi^2}) - \frac{1}{48} 2\pi \left\{ \frac{1}{3} (4\pi^2 + 3) - 2\sqrt{1+\pi^2} - 1 \right\} \\
 &= -\frac{1}{12} \log (\pi + \sqrt{1+\pi^2}) - \frac{1}{24} \pi \left\{ \frac{4}{3} \pi^2 - 2\sqrt{1+\pi^2} \right\} \\
 &= -\frac{1}{12} \log (\pi + \sqrt{1+\pi^2}) - \frac{1}{18} \pi^3 + \frac{1}{12} \pi \sqrt{1+\pi^2}
 \end{aligned}$$

なので、結局、

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \frac{1}{6} \pi^3 \log (1 + \sqrt{1+\pi^2}) + J_4 \\
 &= \frac{1}{6} \pi^3 \log (1 + \sqrt{1+\pi^2}) - \frac{1}{12} \log (\pi + \sqrt{1+\pi^2}) - \frac{1}{18} \pi^3 + \frac{1}{12} \pi \sqrt{1+\pi^2}
 \end{aligned}$$

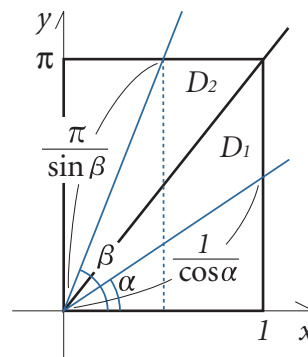
です。

以上を合わせれば、求める積分 J は

$$\begin{aligned}
 J &= J_1 + J_3 + J_2 \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \pi \sqrt{1+\pi^2} + \log (\pi + \sqrt{1+\pi^2}) \right\} - \frac{1}{6} \pi^3 \log \pi + \frac{1}{18} \pi^3 \\
 &\quad + \frac{1}{6} \pi^3 \log (1 + \sqrt{1+\pi^2}) - \frac{1}{12} \log (\pi + \sqrt{1+\pi^2}) - \frac{1}{18} \pi^3 + \frac{1}{12} \pi \sqrt{1+\pi^2} \\
 &= \frac{1}{3} \pi \sqrt{1+\pi^2} + \frac{1}{6} \log (\pi + \sqrt{1+\pi^2}) - \frac{1}{6} \pi^3 \log \pi + \frac{1}{6} \pi^3 \log (1 + \sqrt{1+\pi^2})
 \end{aligned}$$

となります。

【解答例その2 極座標で】 下図の様に問題の積分領域（長方形）を2つの3角形 D_1, D_2 に分割すると、



$$D_1 : \begin{cases} 0 < r \leq \frac{1}{\cos \theta}, \\ 0 \leq \theta \leq \tan^{-1} \pi \end{cases}, \quad D_2 : \begin{cases} 0 < r \leq \frac{\pi}{\sin \theta}, \\ \tan^{-1} \pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

と書く事が出来ます。そこで $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置けば、問題の積分 J は、

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\tan^{-1} \pi} \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} r^2 dr d\theta + \int_{\tan^{-1} \pi}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{\sin \theta}} r^2 dr d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\tan^{-1} \pi} [r^3]_0^{\frac{1}{\cos \theta}} d\theta + \frac{1}{3} \int_{\tan^{-1} \pi}^{\frac{\pi}{2}} [r^3]_0^{\frac{\pi}{\sin \theta}} d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\tan^{-1} \pi} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta + \frac{\pi^3}{3} \int_{\tan^{-1} \pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\tan^{-1} \pi} \frac{\cos \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^2} d\theta - \frac{\pi^3}{3} \int_{\tan^{-1} \pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin \theta}{(1 - \cos^2 \theta)^2} d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}} \frac{1}{(1 - t^2)^2} dt - \frac{\pi^3}{3} \int_{\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}}^0 \frac{1}{(1 - t^2)^2} dt
 \end{aligned}$$

ですが、部分分数分解

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} \right\}$$

によれば、右辺の 2 つの積分（これを J_5, J_6 とします）は、

$$\begin{aligned} J_5 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}} \frac{1}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \frac{1}{12} \left[-\log(1-t) + \frac{1}{1-t} + \log(1+t) - \frac{1}{1+t} \right]_0^{\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}} \\ &= \frac{1}{12} \left[\log \frac{1+t}{1-t} + \frac{2t}{1-t^2} \right]_0^{\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}} \\ &= \frac{1}{12} \left(\log \frac{\sqrt{1+\pi^2} + \pi}{\sqrt{1+\pi^2} - \pi} + 2\pi\sqrt{1+\pi^2} \right) \\ &= \frac{1}{12} \left\{ \log(\sqrt{1+\pi^2} + \pi)^2 + 2\pi\sqrt{1+\pi^2} \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \log(\sqrt{1+\pi^2} + \pi) + \pi\sqrt{1+\pi^2} \right\} \\ J_6 &= -\frac{\pi^3}{3} \int_{\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}}^0 \frac{1}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \frac{\pi^3}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}} \frac{1}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \frac{\pi^3}{12} \left[\log \frac{1+t}{1-t} + \frac{2t}{1-t^2} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}} \\ &= \frac{\pi^3}{12} \left(\log \frac{\sqrt{1+\pi^2} + 1}{\sqrt{1+\pi^2} - 1} + \frac{2\sqrt{1+\pi^2}}{\pi^2} \right) \\ &= \frac{\pi^3}{12} \left\{ \log \frac{(\sqrt{1+\pi^2} + 1)^2}{\pi^2} + \frac{2\sqrt{1+\pi^2}}{\pi^2} \right\} \\ &= \frac{\pi^3}{6} \log(\sqrt{1+\pi^2} + 1) - \frac{1}{6}\pi^3 \log \pi + \frac{1}{6}\pi\sqrt{1+\pi^2} \end{aligned}$$

と計算出来ますので、結局、

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{6} \left\{ \log(\sqrt{1+\pi^2} + \pi) + \pi\sqrt{1+\pi^2} \right\} \\ &\quad + \frac{\pi^3}{6} \log(\sqrt{1+\pi^2} + 1) - \frac{1}{6}\pi^3 \log \pi + \frac{1}{6}\pi\sqrt{1+\pi^2} \\ &= \frac{1}{6} \log(\sqrt{1+\pi^2} + \pi) + \frac{1}{3}\pi\sqrt{1+\pi^2} + \frac{1}{6}\pi^3 \log(\sqrt{1+\pi^2} + 1) - \frac{1}{6}\pi^3 \log \pi \end{aligned}$$

が分かります。

□