11　問題演習

11.1　基本事項

事実 11.1 $a \leq y \leq b$ において $v(y) \leq w(y)$ であって、

$$D : \begin{cases} v(y) \leq x \leq w(y) \\ a \leq y \leq b \end{cases}$$

のとき

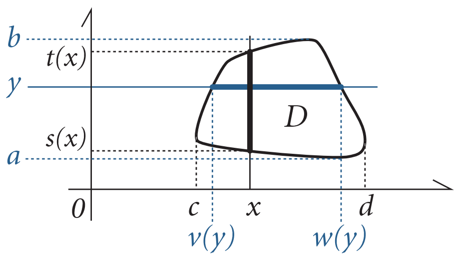
$$\iint_D F(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{v(y)}^{w(y)} F(x,y)dx \right\} dy.$$

事実 11.2 $c \leq x \leq d$ において $s(x) \leq t(x)$ であって、

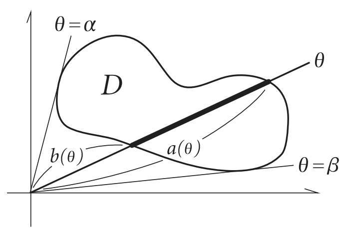
$$D : \begin{cases} s(x) \leq y \leq t(x) \\ c \leq x \leq d \end{cases}$$

のとき

$$\iint_D F(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{s(x)}^{t(x)} F(x,y)dy \right\} dx.$$



事実 11.3



左図の領域 D を極座標で表すと以下の通り：

$$D : \begin{cases} b(\theta) \leq r \leq a(\theta) \\ \beta \leq \theta \leq \alpha \end{cases}$$

11.2　やわらかめ

基本演習 1

$$J = \iint_D (x+2y)dxdy \qquad D : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1$$

基本演習 2

$$J = \iint_D x\,dxdy \qquad D : 0 \leq y \leq -x^2 + 4x$$

基本演習 3

$$J = \iint_D x\,dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0$$

基本演習 4 積分順序を交換して計算してください。

$$J = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3)dydx$$

11.3　ふつう

基本演習 5

$$J = \iint_D x^2\,dxdy \qquad D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

基本演習 6

$$J = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy \qquad D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq x$$

基本演習 7

$$J = \iint_D (x+2y)\mathrm{e}^y\,dxdy \qquad D : 0 \leq y \leq 2x,\ 0 \leq x \leq 1$$

基本演習 8

$$J = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leq 2x$$

基本演習 9

$$J = \iint_D xy\mathrm{e}^{x+y}dxdy \qquad D : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1$$

基本演習 10

$$J=\iint_D x^2y\,dxdy \qquad D\,:\,x^2+y^2\le x,\,y\ge 0$$

基本演習 11 n は正の整数であり、$p>2$ とします。

$$I_n=\iint_{D_n}\frac{1}{(1+x+y)^p}dxdy \qquad D_n\,:\,0\le x\le n,\,0\le y\le n$$

I_n を求め、$\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めてください。

基本演習 12

$$J=\iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy \qquad D\,:\,1<x^2+y^2<4,\,x+y>0$$

基本演習 13

$$J=\iint_D y\,dxdy \qquad D\,:\,x^2+y^2\le y$$

基本演習 14 $a>0$ とします。

$$J=\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}dxdy \qquad D\,:\,x^2+y^2\le a^2,\,xy\ge 0$$

基本演習 15

$$J=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \qquad D\,:\,x^2+y^2\le x,\,y\ge 0$$

基本演習 16

$$J=\iint_D xy\,dxdy \qquad D\,:\,0\le x\le 3,\,\frac{x^2}{3}\le y\le\sqrt{4-x}$$

11.4　かため

基本演習 17

$$J=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\sqrt{1+y^3}dydx$$

基本演習 18

$$J=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 15y\sqrt{2+x^5}dxdy$$

基本演習 19

$$J=\iint_D y^2\sqrt{1-x^2}dxdy \qquad D\,:\,x^2+y^2\le 1,\,y\ge 0$$

基本演習 20

$$J=\iint_D \frac{y\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{x}dxdy \qquad D\,:\,0\le y\le x,\,0\le x\le 1$$

基本演習 21

$$J=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy \qquad D\,:\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$$

基本演習 22

$$J=\iint_D x\,dxdy \qquad D\,:\,x^2+y^2\le 2x,\,y\ge x-1$$

基本演習 23 次の重積分を極座標に変換して計算してください。

$$J=\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy \qquad D\,:\,(x^2+y^2)^2\le x^2-y^2,\,x\ge 0$$

基本演習 24

$$J=\iint_D \sin(x^2)dxdy \qquad D\,:\,0\le y\le x\le\sqrt{\pi}$$

基本演習 25 $0<a<\frac{1}{2}$ とします。

$$J_a=\iint_{D_a}\cos\pi(x-a)^2dxdy \qquad D_a\,:\,y\le x\le\frac{1}{2},\,a\le y\le\frac{1}{2}$$

として以下の問いに答えてください。

(1) J_a を求めてください。

(2) $\lim_{a\to\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-a\right)^{-2}J_a$ を求めてください。

基本演習 26

$$J=\iint_D \frac{1}{x^2+2xy+y^2}dxdy \qquad D\,:\,1\le x^2+y^2\le 4,\,x\ge 0,\,y\ge 0$$

11.5　解答例

基本演習 1

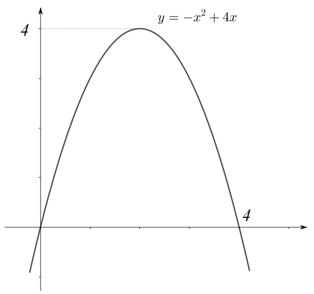
$$J=\iint_D (x+2y)dxdy \qquad D: 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$$

$$\int_0^1\int_1^2 (x+2y)dxdy=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2+2yx\right]_1^2 dy=\int_0^1\left(\frac{3}{2}+2y\right)dy=\left[\frac{3}{2}y+y^2\right]_0^1=\frac{5}{2}$$

□

基本演習 2

$$J=\iint_D x\,dxdy \qquad D: 0\le y\le -x^2+4x$$



積分範囲 D は

$$D:\begin{cases}0\le y\le -x^2+4x\\ 0\le x\le 4\end{cases}$$

と表されますから、

$$\begin{aligned}J&=\int_0^4\int_0^{-x^2+4x} x\,dydx\\&=\int_0^4 [xy]_0^{-x^2+4x}dx\\&=\int_0^4(-x^3+4x^2)dx\\&=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^4\\&=\frac{4^4}{3}-\frac{4^4}{4}\\&=\frac{64}{3}\end{aligned}$$

となります。□

基本演習 3

$$J=\iint_D x\,dxdy \qquad D: x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0$$

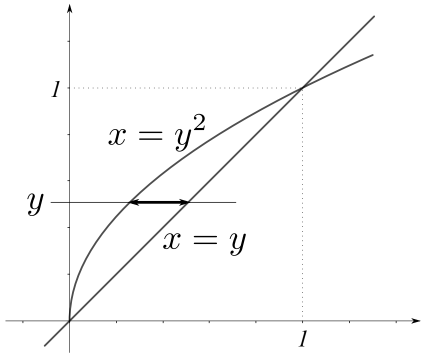
$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と置けば、$dxdy=rdrd\theta$ であって、

$$J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\,drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\int_0^1 r^2dr=[\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

となります。□

基本演習 4 積分順序を交換して計算してください。

$$J=\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}}(y+y^3)dydx$$



積分領域 D は

$$D \,:\, \begin{cases} y^2 \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

と書けるので、

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \int_{y^2}^{y} (y + y^3) dx dy \\ &= \int_0^1 (y + y^3)(y - y^2) dy \\ &= \int_0^1 (y^2 - y^3 + y^4 - y^5) dy \\ &= \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{6} y^6 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{20 - 15 + 12 - 10}{60} \\ &= \frac{7}{60} \end{aligned}$$

です。 □

基本演習 5

$$J = \iint_D x^2 \, dx dy \qquad D \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4$$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置けば、この極座標変換のヤコビアンは r ですから、

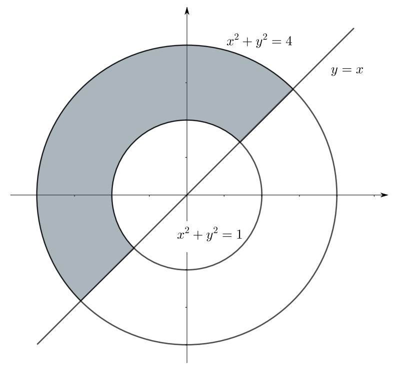
$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \cos^2\theta \cdot r \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_1^2 r^3 dr \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\theta + 1) d\theta \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_1^2 \\ &= \frac{15}{8} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{15\pi}{4} \end{aligned}$$

です。 □

基本演習 6

$$J = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy \qquad D \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \, y \ge x$$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置けば、この極座標変換のヤコビアンは r であり、また積分領域 D は下図の通りですから、

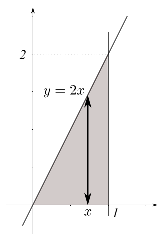


$$J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_1^2\frac{1}{r^2}\cdot r\,drd\theta=\pi\log 2$$

です。 □

基本演習 7

$$J=\iint_D(x+2y)\mathrm{e}^y\,dxdy \qquad D\,:\,0\le y\le 2x,\,0\le x\le 1$$

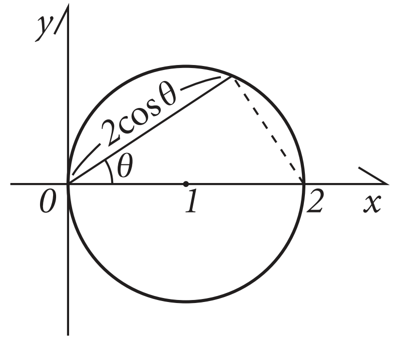


$$\begin{aligned}
J&=\int_0^1\int_0^{2x}(x+2y)\mathrm{e}^y dydx\\
&=\int_0^1\left\{[(x+2y)\mathrm{e}^y]_0^{2x}-\int_0^{2x}2\mathrm{e}^y dy\right\}dx\\
&=\int_0^1\left(5x\mathrm{e}^{2x}-x-[2\mathrm{e}^y]_0^{2x}\right)dx\\
&=\int_0^1\left\{(5x-2)\mathrm{e}^{2x}-x+2\right\}dx\\
&=\left[(5x-2)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1-\int_0^1\frac{5}{2}\mathrm{e}^{2x}dx+\int_0^1(2-x)dx\\
&=\frac{3}{2}\mathrm{e}^2+1-\frac{5}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1+\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\\
&=\frac{3}{2}\mathrm{e}^2+1-\frac{5}{4}\mathrm{e}^2+\frac{5}{4}+2-\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+\frac{15}{4}
\end{aligned}$$

□

基本演習 8

$$J=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy \qquad D\,:\,x^2+y^2\le 2x$$



$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と置けば、この極座標変換のヤコビアンは r であり、また積分領域 D は

$$\begin{cases}0\le r\le 2\cos\theta\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

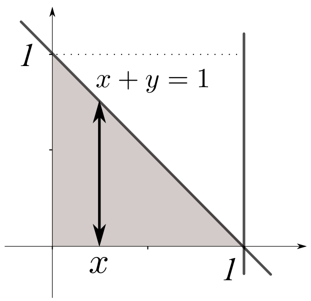
と書けますから、

$$\begin{aligned}
J&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}r^2drd\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{2\cos\theta}d\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta\,d\theta\\
&=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta(1-\sin^2\theta)d\theta\\
&=\frac{8}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{32}{9}
\end{aligned}$$

です。 □

基本演習 9

$$J = \iint_D xy\mathrm{e}^{x+y} dxdy \qquad D : x \geq 0,\, y \geq 0,\, x+y \leq 1$$



積分領域 D は

$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq -x+1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

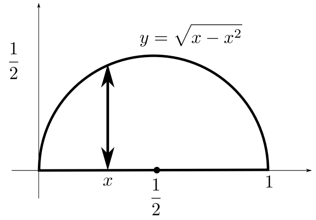
と書けるので、

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\mathrm{e}^{x+y} dydx \\ &= \int_0^1 \left\{ \left[xy\mathrm{e}^{x+y} \right]_0^{1-x} - \int_0^{1-x} x\mathrm{e}^{x+y} dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ x(1-x)\mathrm{e} - \left[x\mathrm{e}^{x+y} \right]_0^{1-x} \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ x(1-x)\mathrm{e} - x\mathrm{e} + x\mathrm{e}^x \right\} dx \\ &= \int_0^1 (-\mathrm{e})x^2 dx + \int_0^1 x\mathrm{e}^x dx \\ &= -\mathrm{e} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + \left[x\mathrm{e}^x \right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x dx \\ &= -\frac{\mathrm{e}}{3} + \mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^x \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{\mathrm{e}}{3} \end{aligned}$$

が得られます。 □

基本演習 10

$$J = \iint_D x^2 y \, dxdy \qquad D : x^2 + y^2 \leq x,\, y \geq 0$$



積分範囲 D は

$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{x-x^2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

と表されますから、

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x-x^2}} x^2 y \, dydx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{x-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^4) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{40} \end{aligned}$$

です。 □

基本演習 11 n は正の整数であり、$p > 2$ とします。

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{(1+x+y)^p} dxdy \qquad D_n : 0 \leq x \leq n,\, 0 \leq y \leq n$$

I_n を求め、$\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めてください。

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^n \int_0^n \frac{1}{(1+x+y)^p} dxdy \\
&= \int_0^n \left[\frac{1}{1-p}(1+x+y)^{1-p}\right]_0^n dy \\
&= \frac{1}{1-p}\int_0^n \left\{(1+n+y)^{1-p} - (1+y)^{1-p}\right\} dy \\
&= \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{2-p}(1+n+y)^{2-p} - \frac{1}{2-p}(1+y)^{2-p}\right]_0^n \\
&= \frac{1}{(1-p)(2-p)}\left\{(1+2n)^{2-p} - (1+n)^{2-p} - (1+n)^{2-p} + 1\right\} \\
&= \frac{1}{(1-p)(2-p)}\left\{\frac{1}{(1+2n)^{p-2}} - \frac{2}{(1+n)^{p-2}} + 1\right\} \\
&\to \frac{1}{(1-p)(2-p)} \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

□

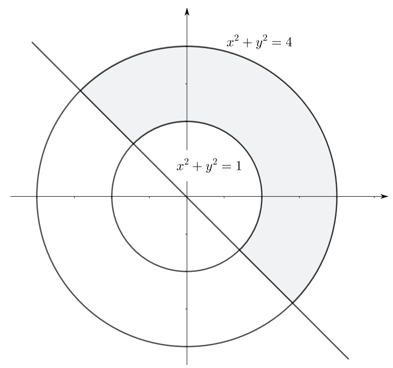
基本演習 **12**

$$J = \iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy \qquad D : 1 < x^2+y^2 < 4,\ x+y > 0$$

積分領域 D は下図の通りであって、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置けば不等式：

$$D : \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

で表されます。



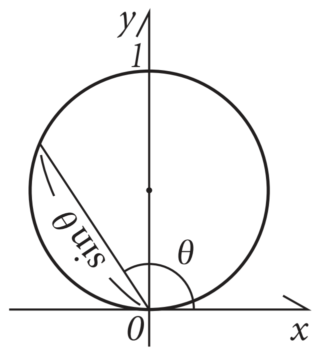
この極座標変換のヤコビアンは r なので

$$
\begin{aligned}
J &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 \frac{r\cos\theta\log r^2}{r^2}\cdot r\, dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\theta\, d\theta \int_1^2 2\log r\, dr \\
&= [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[2(r\log r - r)\right]_1^2 \\
&= 2\sqrt{2}(2\log 2 - 1)
\end{aligned}
$$

です。 □

基本演習 **13**

$$J = \iint_D y\, dxdy \qquad D : x^2+y^2 \le y$$



積分領域 D は上図の通りであって、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置けば不等式：

$$D\ :\ \begin{cases} 0 \le r \le \sin\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

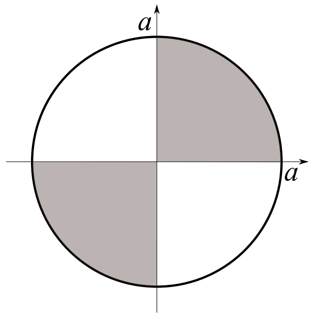
で表されます。したがって

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi}\int_0^{\sin\theta} r\sin\theta\cdot r\,drd\theta \\ &= \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\sin\theta\right]_0^{\sin\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right\}^2 d\theta \\ &= \frac{1}{12}\int_0^{\pi}(\cos^2 2\theta - 2\cos 2\theta + 1)d\theta \\ &= \frac{1}{12}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}(\cos 4\theta + 1) - 2\cos 2\theta + 1\right\} d\theta \\ &= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{8}\sin 4\theta - \sin 2\theta + \frac{3}{2}\theta\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

が分かります。 □

基本演習 14 $a > 0$ とします。

$$J = \iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}dxdy \qquad D\ :\ x^2 + y^2 \le a^2,\ xy \ge 0$$



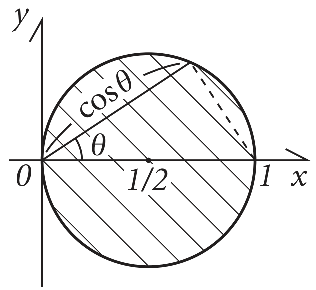
$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置けば、

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} r\mathrm{e}^{-r^2}drd\theta + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{a} r\mathrm{e}^{-r^2}drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^{a} d\theta + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^{a} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right) \end{aligned}$$

です。 □

基本演習 15

$$J = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \qquad D\ :\ x^2 + y^2 \le x,\ y \ge 0$$



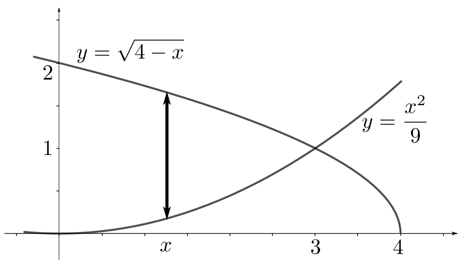
$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置けば、$dxdy = rdrd\theta$ なので、

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \sqrt{1-r^2}r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^3\theta\right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{1}{3}(-1)\right\} \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

となります。間違っても平行移動などしない様に。 □

基本演習 16

$$J = \iint_D xy\,dxdy \qquad D : 0 \le x \le 3,\ \frac{x^2}{3} \le y \le \sqrt{4-x}$$



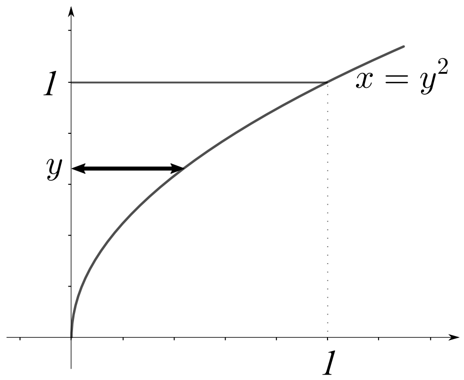
$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^3 \int_{\frac{x^2}{9}}^{\sqrt{4-x}} xy\,dydx \\
&= \int_0^3 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{\frac{x^2}{9}}^{\sqrt{4-x}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 \left\{x(4-x) - \frac{1}{81}x^5\right\} dx \\
&= \frac{1}{2}\left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{81\cdot 6}x^6\right]_0^3 \\
&= \frac{1}{2}\left(18 - 9 - \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{15}{4}
\end{aligned}
$$

□

基本演習 17

$$J = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}dydx$$

このままの積分順序では積分出来ないので、順序を交換します。



積分領域（D とします）は

$$D : \begin{cases} 0 \le x \le y^2 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

と書けるので、

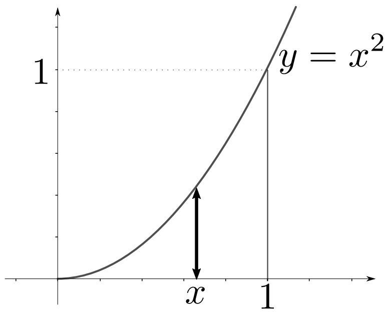
$$\begin{aligned} J &= \iint_D \sqrt{1+y^3}dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3}dxdy \\ &= \int_0^1 y^2\sqrt{1+y^3}dy \\ &= \left[\frac{2}{9}(1+y^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

です。 □

基本演習 18

$$J = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 15y\sqrt{2+x^5}dxdy$$

これもこのままの順序（x で先に積分）では積分出来ませんので、積分順序の交換をします。



積分範囲 D は

$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

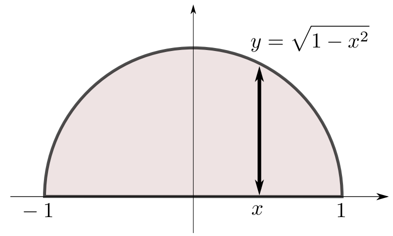
と書けますから、

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \int_0^{x^2} 15y\,dy\sqrt{2+x^5}dx \\ &= \int_0^1 \frac{15}{2}x^4\sqrt{2+x^5}dx \\ &= \left[(2+x^5)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= 3\sqrt{3}-2\sqrt{2} \end{aligned}$$

です。 □

基本演習 19

$$J = \iint_D y^2\sqrt{1-x^2}dxdy \qquad D : x^2+y^2 \leq 1,\, y \geq 0$$



x で先に積分するには $\sqrt{1-x^2}$ を積分せねばならず面倒です。一方、先に y で積分するとちょうどルートが消えそうで良い感じに思えます。

積分領域 D は不等式：

$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

で表されますから、

$$\begin{aligned}
J &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y^2\sqrt{1-x^2}dydx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}y^3\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)dx \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{1}(x^4-2x^2+1)dx \\
&= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right) \\
&= \frac{2(3-10+15)}{45} \\
&= \frac{16}{45}
\end{aligned}$$

となります。 □

基本演習 20

$$J=\iint_D \frac{y\,(\mathrm{e}^x-1)}{x}dxdy \qquad D\,:\,0\le y\le x,\,0\le x\le 1$$

　これを x で積分はしたくありません。なら y でやってみましょうか。問題の積分領域の与えられ方が縦切りになっていますから、何も考えずにそのままやってもこの問題は大丈夫でしょうか。

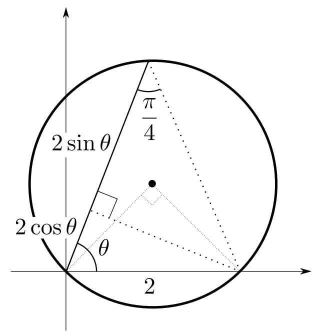
$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1\int_0^x \frac{y\,(\mathrm{e}^x-1)}{x}dydx \\
&= \int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^x\frac{(\mathrm{e}^x-1)}{x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x(\mathrm{e}^x-1)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x(\mathrm{e}^x-x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1(\mathrm{e}^x-x)dx \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)-\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

です。 □

基本演習 21

$$J=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy \qquad D\,:\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$$

　これは平行移動してしまうと、積分領域は簡単になりますが、被積分関数が難しくなりそうですので、平行移動せずにそのまま極座標でやってみましょう。



　図の通り、直角２等辺三角形に注意すれば積分領域 D は不等式：

$$D\,:\,\begin{cases}0\le r\le 2(\sin\theta+\cos\theta)\\ -\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}\end{cases}$$

で表されます。

途中三角関数の合成を使えば

$$\begin{aligned}J &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} r^2 dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin\theta+\cos\theta)^3 d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\sqrt{2}\sin^3\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) d\theta\end{aligned}$$

であり、更に $\theta+\frac{\pi}{4}=\phi$ と置けば

$$\begin{aligned}&= \frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\phi\, d\phi \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3}\left[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3}\left\{1-(-1)+\frac{1}{3}(-1-1)\right\} \\ &= \frac{64\sqrt{2}}{9}\end{aligned}$$

となります。 □

基本演習 22

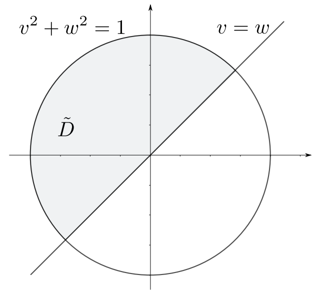
$$J=\iint_D x\,dxdy \qquad D : x^2+y^2 \leq 2x,\ y \geq x-1$$

一転こちらは平行移動したほうが良いのではないでしょうか？縦切りにしても横切りにしてもスプリットしますし、このまま極座標にしてもスプリットします。

$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ だけ平行移動すれば、つまり $x-1=v,\ y=w$ と変数変換すれば積分領域 D は積分領域 $\tilde{D}$:

$$\tilde{D} : v^2+w^2 \leq 1, \quad w \geq v$$

に変換されます。



平行移動のヤコビアンは 1 ですから、

$$J=\iint_{\tilde{D}}(v+1)dvdw$$

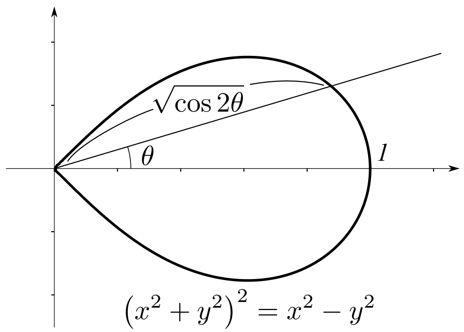
であり、さらに極座標に変換すれば、つまり、$v=r\cos\theta, w=r\sin\theta$ と置けば、ヤコビアンは r であって

$$\begin{aligned}J &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_0^1 r(r\cos\theta+1)drd\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left[\frac{1}{3}r^3\cos\theta+\frac{1}{2}r^2\right]_0^1 d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{1}{2}\right)d\theta \\ &= \left[\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{1}{2}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

となります。 □

基本演習 23 次の重積分を極座標に変換して計算してください。

$$J=\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy \qquad D : (x^2+y^2)^2 \leq x^2-y^2,\ x \geq 0$$



$$\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2 - y^2$$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置けば、積分領域 D は

$$\begin{aligned}
& (r^2)^2 \le r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta), \quad r\cos\theta \ge 0 \\
\iff\ & r^2 \le \cos 2\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\
\iff\ & r \le \sqrt{\cos 2\theta}, \quad \cos 2\theta \ge 0, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\
\iff\ & r \le \sqrt{\cos 2\theta}, \quad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

と表されます。

$$\begin{aligned}
J &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r}{(1+r^2)^2}\,drd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+r^2}\right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{1+\cos 2\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos 2\theta} d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2\theta} d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\tan\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

基本演習 24

$$J = \iint_D \sin(x^2)dxdy \qquad D : 0 \le y \le x \le \sqrt{\pi}$$

先に x で積分することはできません。

$$J = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sin(x^2)dydx = \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1$$

□

基本演習 25 $0 < a < \frac{1}{2}$ とします。

$$J_a = \iint_{D_a} \cos\pi(x-a)^2 dxdy \qquad D_a : y \le x \le \frac{1}{2}, a \le y \le \frac{1}{2}$$

として以下の問いに答えてください。

(1) J_a を求めてください。

(2) $\lim_{a\to\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-a\right)^{-2} J_a$ を求めてください。

$$\begin{aligned}
J_a &= \int_a^{\frac{1}{2}} \int_a^x \cos\pi(x-a)^2 dydx \\
&= \int_a^{\frac{1}{2}} (x-a)\cos\pi(x-a)^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\sin\pi(x-a)^2\right]_a^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sin\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)^2
\end{aligned}$$

ですから、$a \to \frac{1}{2}$ のとき

$$\left(\frac{1}{2}-a\right)^{-2} J_a = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)^2}{\left(\frac{1}{2}-a\right)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)^2}{\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)^2} \to \frac{\pi}{2}$$

です。 □

基本演習 26

$$J = \iint_D \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2} dxdy \qquad D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置けば、

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{1}{r^2 + 2r^2\cos\theta\sin\theta} \cdot r\, drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2\theta} d\theta \int_1^2 \frac{1}{r} dr \\
&= \log 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2\theta} d\theta
\end{aligned}$$

ですが、ここで積分範囲を２つに分けて

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin 2\theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2\theta} d\theta$$

前者では $\theta = \frac{\pi}{4} - \phi$、後者では $\theta = \frac{\pi}{4} + \xi$ と置換すれば

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right)} (-1) d\phi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\xi\right)} d\xi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos 2\phi} d\phi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos 2\xi} d\xi \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos 2x} dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2 x} dx \\
&= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

によれば、$J = \log 2$ です。 □