

11 問題演習

11.1 基本事項

事実 11.1 $a \leq y \leq b$ において $v(y) \leq w(y)$ であって、

$$D : \begin{cases} v(y) \leq x \leq w(y) \\ a \leq y \leq b \end{cases}$$

のとき

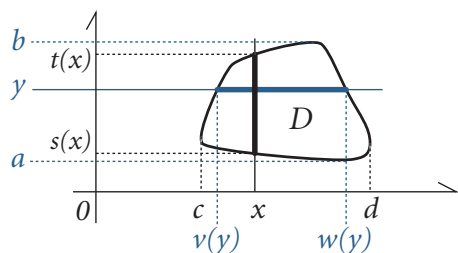
$$\iint_D F(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{v(y)}^{w(y)} F(x, y) dx \right\} dy.$$

事実 11.2 $c \leq x \leq d$ において $s(x) \leq t(x)$ であって、

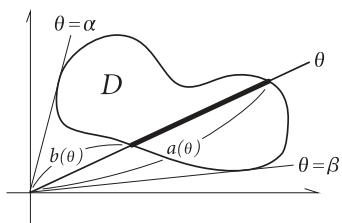
$$D : \begin{cases} s(x) \leq y \leq t(x) \\ c \leq x \leq d \end{cases}$$

のとき

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_{s(x)}^{t(x)} F(x, y) dy \right\} dx.$$



事実 11.3



左図の領域 D を極座標で表すと以下の通り：

$$D : \begin{cases} b(\theta) \leq r \leq a(\theta) \\ \beta \leq \theta \leq \alpha \end{cases}$$

11.2 やわらかめ

基本演習 1

$$J = \iint_D (x + 2y) dx dy \quad D : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$$

基本演習 2

$$J = \iint_D x dx dy \quad D : 0 \leq y \leq -x^2 + 4x$$

基本演習 3

$$J = \iint_D x dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$$

基本演習 4 積分順序を交換して計算してください。

$$J = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3) dy dx$$

11.3 ふつう

基本演習 5

$$J = \iint_D x^2 dx dy \quad D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

基本演習 6

$$J = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy \quad D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x$$

基本演習 7

$$J = \iint_D (x + 2y)e^y dx dy \quad D : 0 \leq y \leq 2x, 0 \leq x \leq 1$$

基本演習 8

$$J = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq 2x$$

基本演習 9

$$J = \iint_D xye^{x+y} dx dy \quad D : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$$

基本演習 10

$$J = \iint_D x^2 y \, dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0$$

基本演習 11 n は正の整数であり、 $p > 2$ とします。

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{(1+x+y)^p} \, dx dy \quad D_n : 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n$$

I_n を求め、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めてください。

基本演習 12

$$J = \iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \, dx dy \quad D : 1 < x^2 + y^2 < 4, x + y > 0$$

基本演習 13

$$J = \iiint_D y \, dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq y$$

基本演習 14 $a > 0$ とします。

$$J = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq a^2, xy \geq 0$$

基本演習 15

$$J = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0$$

基本演習 16

$$J = \iint_D xy \, dx dy \quad D : 0 \leq x \leq 3, \frac{x^2}{3} \leq y \leq \sqrt{4-x}$$

11.4 かため

基本演習 17

$$J = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} \, dy dx$$

基本演習 18

$$J = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 15y \sqrt{2+x^5} \, dx dy$$

基本演習 19

$$J = \iint_D y^2 \sqrt{1-x^2} \, dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$$

基本演習 20

$$J = \iint_D \frac{y(e^x - 1)}{x} \, dx dy \quad D : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1$$

基本演習 21

$$J = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy \quad D : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$$

基本演習 22

$$J = \iint_D x \, dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq x-1$$

基本演習 23 次の重積分を極座標に変換して計算してください。

$$J = \iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \, dx dy \quad D : (x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x \geq 0$$

基本演習 24

$$J = \iint_D \sin(x^2) \, dx dy \quad D : 0 \leq y \leq x \leq \sqrt{\pi}$$

基本演習 25 $0 < a < \frac{1}{2}$ とします。

$$J_a = \iint_{D_a} \cos \pi(x-a)^2 \, dx dy \quad D_a : y \leq x \leq \frac{1}{2}, a \leq y \leq \frac{1}{2}$$

として以下の問いに答えてください。

(1) J_a を求めてください。

(2) $\lim_{a \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - a\right)^{-2} J_a$ を求めてください。

基本演習 26

$$J = \iint_D \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2} \, dx dy \quad D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$$