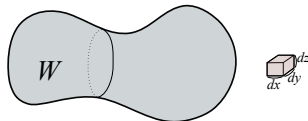


## 12 立体の体積

### 12.1 いろいろな体積計算法

#### 12.1.1 みじん切り法

3次元空間内の領域（立体） $W$  の体積  $V$  を求める問題を考えます。



$W$  を縦／横／高さが  $dx, dy, dz$  である微小キューブに細分化し（みじん切り）、一つの体積  $dx dy dz$  を全部（領域  $W$  内で）足し合わせれば、

$$V = \iiint_W dx dy dz$$

となりますが、この3重積分を累次積分に直して計算しなければなりません。そのためには領域  $W$  を不等式で表現する必要があります。

#### 12.1.2 千切り法

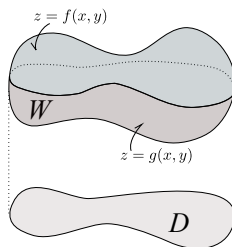
例えば立体  $W$  が  $(x, y) \in D$  において  $g(x, y) \leq f(x, y)$  が成り立っている様な2枚の曲面  $z = f(x, y), z = g(x, y)$  によって

$$W : \begin{cases} g(x, y) \leq z \leq f(x, y), \\ (x, y) \in D \end{cases}$$

と書いていたとすると、3重積分を1次元と2次元に分解して

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left\{ \int_{g(x,y)}^{f(x,y)} dz \right\} dx dy \\ &= \iint_D \underbrace{\{f(x,y) - g(x,y)\}}_{\text{高さ}} \underbrace{dx dy}_{\text{微小底面積}} \end{aligned}$$

とする事が出来ます。



これは丁度、領域  $W$  を  $z$ -軸に平行に千切りにしたと考えれば良く、ある点  $(x, y, 0)$  を通る1本の極細い“いもけんび”の体積は、底面積  $dx dy$  に高さ  $f(x, y) - g(x, y)$  を掛けたものになっていて、これを  $xy$ -平面の領域  $D$  内で全部足し合わせた格好になっています。つまり、千切りにした時の切る範囲がこの領域  $D$  であって、これはこの3次元領域  $W$  を  $z$ -軸の上の方から見た時に  $xy$ -平面に射影してどの範囲になっているかと言うものになっているはずで。

後はこの  $D$  での2重積分を更に累次積分に直して計算していけば良い事になります。

この様に3次元領域  $W$  の体積を千切り法によって計算するには、まずこの領域を  $z$ -軸方向から見て  $xy$ -平面に射影した2次元領域  $D$  がどんな領域になるのかきちんと見極める必要があります、これが2重積分の積分範囲になります。

そしてその範囲内で、点  $(x, y, 0)$  を通る  $z$ -軸に平行な直線を考えてこの直線が領域  $W$  と交わっているのが  $z$  で言ってどの範囲であるのか（ $g(x, y) \leq z \leq f(x, y)$  など）を調べなければなりません。まあこれは3次元での“たて切り”と言えるでしょう。

#### 12.1.3 スライス法

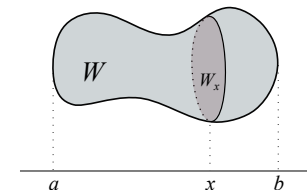
あるいは、 $W$  が別のタイプの不等式：

$$W : \begin{cases} (y, z) \in W_x \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

で表される場合は、3重積分を2次元と1次元に分解して

$$V = \int_a^b \underbrace{\left\{ \iint_{W_x} dy dz \right\}}_{\text{断面積}} \underbrace{dx}_{\text{微小厚み}}$$

と計算されます。



これは丁度立体  $W$  を  $x$  座標一定の平面で切った切り口が（2次元の）領域  $W_x$  になっていると云うことであって、スライスした1枚1枚の微小体積（内側の2重積分が断面

積であり、それに微小な厚み  $dx$  を掛けています) を足し合わせて全体の体積としています。

立体によっては、断面が三角形などの『面積が(積分しなくても)簡単に分かる』領域になっている場合があります、そういった場合はスライス方は有力な体積計算手段となります。

## 12.2 どちらを“上”と見るか

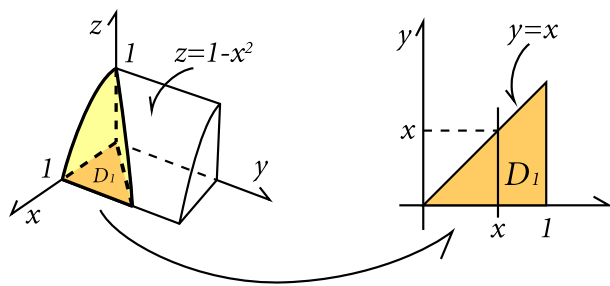
**問題 12.1 [教科書 例題 8.3]** 柱面  $z = 1 - x^2$  と 3 つの平面  $y = x, y = 0, z = 0$  で囲まれた立体の  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  の部分の体積を求めて下さい。

【解答例その 1  $z$ -軸を垂直にした場合】 この立体 ( $W$  と云う名前にしておきます) を図示すると下左図のようになっており、立体を  $xy$ -平面に射影すると下右図の  $D_1$  となっています。この領域内の点  $(x, y)$  に対して  $z$  の範囲は  $0 \leq z \leq 1 - x^2$  となりますから、 $W$  は不等式：

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x^2 \\ (x, y) \in D_1 \end{cases}$$

で表されます。

従ってこの立体  $W$  の体積 (これを  $V$  とします) は、積分範囲を  $D_1$ 、被積分関数を  $1 - x^2 - 0$  として 2 重積分を計算すれば求められます。



更にこの積分領域  $D_1$  を不等式で表現すると

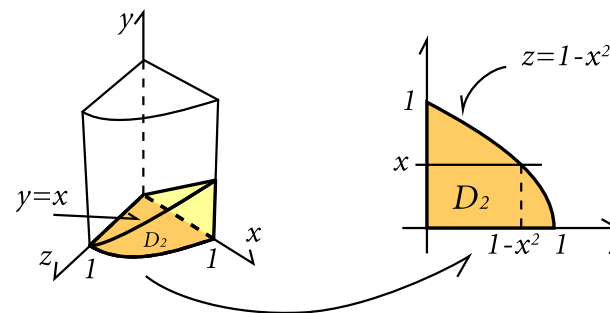
$$\begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ですから、これを使って累次積分を計算すれば

$$V = \iint_{D_1} (1 - x^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^x (1 - x^2) dy dx = \int_0^1 x(1 - x^2) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

が分かります。

【解答例その 2  $y$ -軸を垂直にした場合】 しかし別に  $z$ -軸方向を上だと思わなければならないわけではありません。仮に  $y$ -軸方向を上向きと考えた場合を図示してみると下図左のようになっており、 $zx$ -平面への射影は下図右の領域  $D_2$  です。



この立体を不等式で表すと

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ (z, x) \in D_2 \end{cases}$$

となりますから、この場合は  $D_2$  を積分領域として被積分関数  $x$  を積分すれば立体の体積  $V$  が得られるはずです。

領域  $D_2$  は不等式で表現すると

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

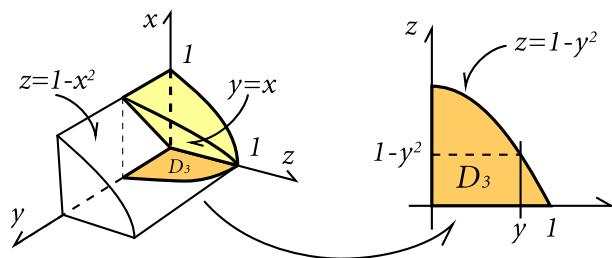
ですから、求める体積は

$$V = \iint_{D_2} x dz dx = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x dz dx = \int_0^1 x(1 - x^2) dx = \frac{1}{4}$$

です。

【解答例その 3  $x$ -軸を垂直にした場合】 折角ですから  $x$ -軸を上にした場合も見てみましょう。これはちょっと特殊で、上の曲面  $z = 1 - x^2$  (すなわち  $x = \sqrt{1 - z}$ ) と下

の曲面  $x = y$  に挟まれた部分になっています：



この場合積分範囲がどのような領域になるかきちんと見定めなくてはなりません。この立体を上から見た時、 $yz$ -平面への射影としてどんな風に見えるかと言うと、それは丁度 2 つの曲面の交線の射影と 2 つの座標軸が境界線になっている領域ですね。

2 曲面の交線が  $z = 1 - x^2$ ,  $x = y$  を連立させて  $z = 1 - y^2$  になっている事に注意すればこの立体の射影は上図右の領域  $D_3$  になり、図の様にたて切りすれば不等式：

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - y^2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

で表現されます。これを使って累次積分を計算すれば

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D_3} (\sqrt{1-z} - y) dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-y^2} (\sqrt{1-z} - y) dz dy \\ &= \int_0^1 \left[ -\frac{2}{3}(1-z)^{\frac{3}{2}} - yz \right]_0^{1-y^2} dy \\ &= \int_0^1 \left\{ -\frac{2}{3}y^3 - y(1-y^2) + \frac{2}{3} \right\} dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{3}y^3 - y + \frac{2}{3} \right) dy \\ &= \left[ \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となってやはり同じ答えが出てきます。

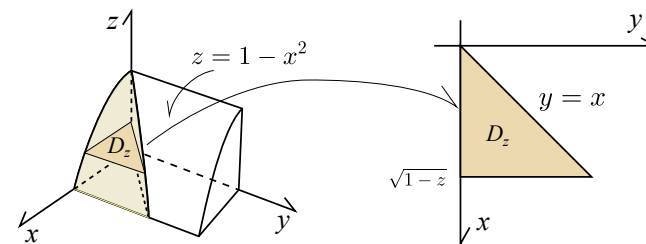
【解答例その4 スライス法  $z$ -軸に垂直に切った場合】 全く別の方法で（2重積分すら使いません）体積を計算してみましょう。

この立体を  $xy$ -平面に平行な平面でスライスして 1 枚 1 枚の極薄い（厚さ  $dz$ ）スライスの体積を計算し、それを全て足し合わせれば立体の体積になるはず。

この立体を例えば  $z$  の高さでスライスすると、 $z$  を定数と思えば

$$\begin{cases} x^2 = 1 - z, & \text{すなわち, } x = \sqrt{1-z} \\ y = x \\ y = 0 \end{cases}$$

で囲まれた領域が断面になりますがこれは図の通り 3 角形で、その面積は簡単に  $\frac{1}{2}(1-z)$  であることが分かります。

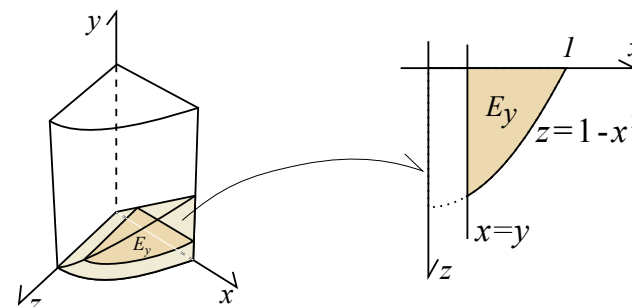


これに微小な厚み  $dz$  を掛ければ 1 枚のスライスの体積になりますから、これを  $z = 0$  から  $z = 1$  まで全部足し合わせれば

$$V = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z) dz = \left[ -\frac{1}{4}(1-z)^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

が得られ、先の 3 つの計算結果と一致しています。

【解答例その5  $y$ -軸に垂直に切った場合】  $y$ -軸方向を上向きと考えた場合に立体  $W$  を図示してみると下図左のようになっており、 $y$ -軸に垂直に切った断面は下図右の領域  $E_y$  です。



断面  $E_y$  の面積は

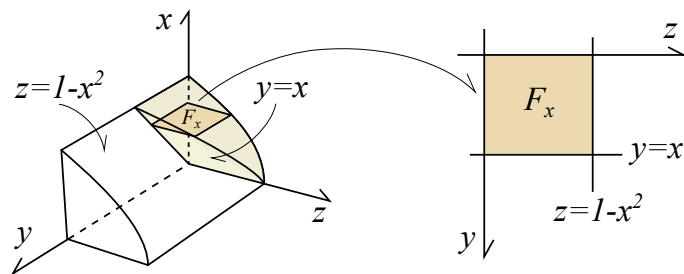
$$(\text{断面積}) = \int_y^1 (1 - x^2) dx = \left[ x - \frac{1}{3}x^3 \right]_y^1 = \frac{2}{3} - y + \frac{1}{3}y^3$$

ですから、求める体積は

$$V = \int_0^1 \left( \frac{2}{3} - y + \frac{1}{3}y^3 \right) dy = \left[ \frac{2}{3}y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{12}y^4 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

です。

【解答例その6  $x$ -軸に垂直に切った場合】  $x$ -軸に垂直に切った場合、4 直線  $z = 1 - x^2$ ,  $y = x$ ,  $z = 0$ ,  $y = 0$  で囲まれた長方形が切り口  $F_x$  です。



従って断面積は  $x(1 - x^2)$  であり、求める体積  $V$  は

$$V = \int_0^1 x(1 - x^2) dx = \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

です。

□

## 12.3 Exercise

+ 千切り法とスライス法の両方を試してみてください +

基本演習 1 次の不等式の表す立体  $K$  の体積を求めてください。

$$K : \begin{cases} e^x \leq y \leq 8 \\ 0 \leq z \leq x \end{cases}$$

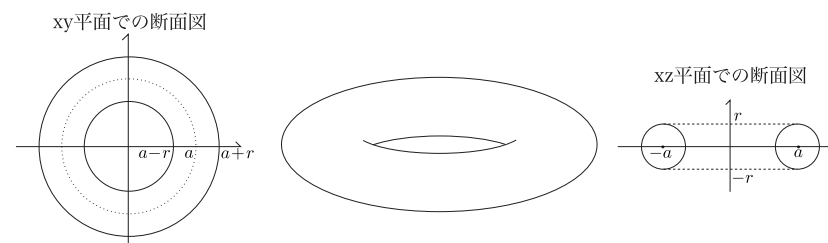
基本演習 2 [教科書 問題 8.3(1)] 平面  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  と 3 つの座標平面で囲まれた立体の体積を求めて下さい (ただし、 $a, b, c$  は正の定数とします)。

基本演習 3 [教科書 問題 8.3(2)] 曲面  $z = x^2 + y^2$  と平面  $z = 4$  で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

基本演習 4 次の不等式が表す立体  $K$  の体積を求めてください。

$$K : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq xy$$

基本演習 5 図のドーナツ (torus) の体積を求めて下さい :



## Exercise 解答例

基本演習 1 次の不等式の表す立体  $K$  の体積を求めてください。

$$K : \begin{cases} e^x \leq y \leq 8 \\ 0 \leq z \leq x \end{cases}$$

【解答例その 1  $z$  軸に垂直にスライス】問題の立体  $K$  を  $z$  座標一定の平面で切った切り口  $K_z$  は、 $z$  を定数と見て上の不等式から下図の領域である事が分かります。：



ただし、 $z > \log 8$  の場合と  $z < 0$  の場合にはこの不等式は空集合を表します。

その面積  $S_z$  は

$$S_z = \int_z^{\log 8} (8 - e^x) dx = [8x - e^x]_z^{\log 8} = 8 \log 8 - 8 - 8z + e^z$$

です。

従って求める体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\log 8} (8 \log 8 - 8 - 8z + e^z) dz \\ &= 8(\log 8)^2 - 8 \log 8 + [-4z^2 + e^z]_0^{\log 8} \\ &= 8(\log 8)^2 - 8 \log 8 - 4(\log 8)^2 + 8 - 1 \\ &= 4(\log 8)^2 - 8 \log 8 + 7 \end{aligned}$$

となります。

【解答例その 2  $x$  軸に垂直にスライス】問題の立体  $K$  を  $x$  座標一定の平面で切った切り口  $K_x$  は、 $x$  を定数と見て上の不等式から：

$$K_x : \begin{cases} \underbrace{e^x}_{\text{定数}} \leq y \leq 8 \\ 0 \leq z \leq \underbrace{x}_{\text{定数}} \end{cases}$$

長方形である事が分かります。ただし、 $x > \log 8$  の場合と  $x < 0$  の場合にはこの不等式は空集合を表します。

従って求める体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\log 8} (8 - e^x) x dx \\ &= \int_0^{\log 8} 8x dx - \int_0^{\log 8} x e^x dx \\ &= [4x^2]_0^{\log 8} - [x e^x]_0^{\log 8} + \int_0^{\log 8} e^x dx \\ &= 4(\log 8)^2 - 8 \log 8 + [e^x]_0^{\log 8} \\ &= 4(\log 8)^2 - 8 \log 8 + 7 \end{aligned}$$

となります。

【解答例その 3  $y$  軸に垂直にスライス】問題の立体  $K$  を  $y$  座標一定の平面で切った切り口  $K_y$  は、 $y$  を定数と見て上の不等式から：

$$K_y : \begin{cases} x \leq \underbrace{\log y}_{\text{定数}} \\ 0 \leq z \leq x \end{cases}$$

三角形である事が分かります。ただし、 $x \geq 0$  のとき

$$1 \leq e^x \leq y \leq 8$$

に注意すれば、 $y > 8$  の場合と  $y < 1$  の場合にはこの不等式は空集合を表します。

従って求める体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \int_1^8 \frac{1}{2} (\log y)^2 dy \\ &= \left[ \frac{1}{2} y (\log y)^2 \right]_1^8 - \int_1^8 \frac{1}{2} y 2 \log y \cdot \frac{1}{y} dy \\ &= 4(\log 8)^2 - \int_1^8 \log y dy \\ &= 4(\log 8)^2 - [y \log y]_1^8 + \int_1^8 y \frac{1}{y} dy \\ &= 4(\log 8)^2 - 8 \log 8 + 7 \end{aligned}$$

となります。

【解答例その4 千切り法  $z$  軸に平行に千切りしてみましょうか】

$$K : \begin{cases} e^x \leq y \leq 8 \\ 0 \leq z \leq x \end{cases}$$

ですから、この立体は4つの曲面：

$$S_1 : e^x = y, \quad S_2 : y = 8, \quad S_3 : z = 0, \quad S_4 : z = x$$

で囲まれています。

$z$  軸方向を『高さ』と考えれば、 $z$  変数を含まない、従って  $z$  軸に平行な曲面は『垂直な壁』であって、『屋根、床』ではあり得ません。

$S_1$  は  $z$  変数を含みませんから ( $z$  の値は何であっても良いと云うことになります)、 $z$  軸方向に伸びた柱面であり、 $z$  軸に垂直に切ると常に曲線  $e^x = y$  です。

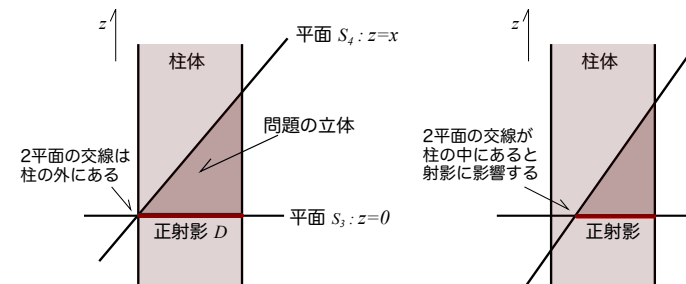
$S_2$  はいわゆる  $y$  座標一定の平面であって、 $y$  軸に垂直な平面です。

しかし不等式  $0 \leq x$  が成り立っていますから、結局、 $xy$ -平面の領域  $D$ ：

$$D : \begin{cases} e^x \leq y \leq 8 \\ 0 \leq x \end{cases}$$

を  $z$  軸方向に伸ばした柱体を考えていて、これを残りの2つの平面  $S_3, S_4$  で切っていることになるでしょう。平面  $S_3$  は  $xy$ -平面であり、 $S_4$  は  $S_3$  と領域  $D$  の外にある  $y$  軸

で交わっていて、領域  $D$  上では常に  $S_3$  より  $S_4$  が上にあります。



この場合2平面  $S_3, S_4$  は射影には影響を与えませんから、この立体  $K$  を  $xy$  平面に正射影したものは、上の領域  $D$  になります。

すると求める体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \iint_D x dx dy \\ &= \int_0^{\log 8} \int_{e^x}^8 x dy dx \\ &= \int_0^{\log 8} x(8 - e^x) dx \\ &= [x(8x - e^x)]_0^{\log 8} - \int_0^{\log 8} (8x - e^x) dx \\ &= 8(\log 8)^2 - 8 \log 8 + [e^x - 4x^2]_0^{\log 8} \\ &= 4(\log 8)^2 - 8 \log 8 + 7 \end{aligned}$$

です。

【解答例その5 千切り法  $y$  軸に平行に千切りしてみる】4つの曲面：

$$S_1 : e^x = y, \quad S_2 : y = 8, \quad S_3 : z = 0, \quad S_4 : z = x$$

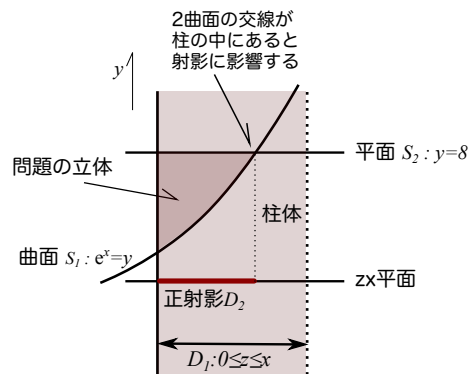
のうち、 $y$  を含まない  $S_3, S_4$  が垂直な壁であり、ひとまず

$$D_1 : 0 \leq z \leq x$$

としておきます (これが正射影になるわけではありません)。

$y$  を含む  $S_1, S_2$  が『上下の屋根 (床?)』になっています。

2つの『屋根』は  $y = 8, x = \log 8, z = (\text{任意})$  と云う直線で交わっており、問題文を見ると、 $S_1$  が  $S_2$  より下になければなりません。



従ってさっき見た領域  $D_1$  内の点のうち、 $S_1$  が  $S_2$  より下にある範囲は

$$D_2 : \begin{cases} 0 \leq z \leq x \\ x \leq \log 8 \end{cases}$$

と云うことになります。従ってこの領域  $D_2$  が  $K$  の  $zx$  平面への正射影となります。

従って体積は

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D_2} (8 - e^x) dz dx \\ &= \int_0^{\log 8} \int_0^x (8 - e^x) dz dx \\ &= \int_0^{\log 8} x(8 - e^x) dx \end{aligned}$$

であり、これはさっきと同じ積分ですから、同様に計算して

$$V = 4(\log 8)^2 - 8 \log 8 + 7$$

です。

【解答例その5 千切り法  $x$  軸に平行に千切りしてみる】4つの曲面：

$$S_1 : e^x = y, \quad S_2 : y = 8, \quad S_3 : z = 0, \quad S_4 : z = x$$

のうち、 $x$  を含まない  $S_2, S_3$  が垂直な壁であり、ひとまず

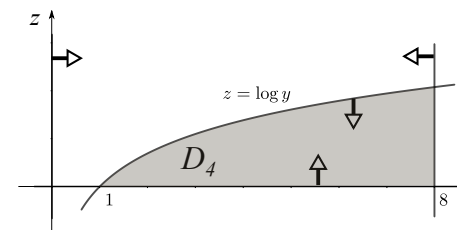
$$D_3 : 0 \leq y \leq 8, \quad 0 \leq z$$

としておきましょう。

他の2枚  $S_1, S_4$  が上下の『屋根（床）』です。まずこの2枚の屋根：

$$S_1 : x = \log y, \quad S_4 : x = z$$

が題意の様な上限関係にあるための  $(y, z)$  の条件を求めると、 $z \leq \log y$  となります。従って領域  $D_3$  のうち  $z \leq \log y$  を満たす部分  $D_4$  がこの立体  $K$  を  $yz$  平面へ正射影したことになります：



従って求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D_4} (\log y - z) dy dz \\ &= \int_1^8 \int_0^{\log y} (\log y - z) dz dy \\ &= \int_1^8 \left[ z \log y - \frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\log y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^8 (\log y)^2 dy \\ &= 4(\log 8)^2 - 8 \log 8 + 7 \end{aligned}$$

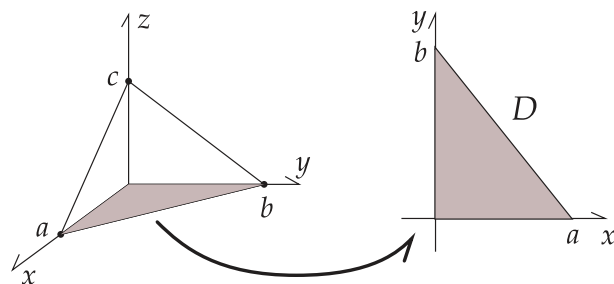
です。

□

この様に、垂直な壁以外の曲面・平面が、壁の内部で交わってしまうと立体の正射影が分かりづらくなります。この問題で言えば  $z$  軸に平行に千切りにすれば最もやりやすいと言えるでしょう。

**基本演習 2 [教科書 問題 8.3(1)]** 平面  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  と 3 つの座標平面で囲まれた立体の体積を求めて下さい (ただし、 $a, b, c$  は正の定数とします)。

【解答例その 1 千切り法】 この平面は座標平面に平行ではないので、各座標軸との交点を求めてみると  $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$  の 3 点を通っている事が分かります。従って題意の立体は 3 点  $(0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0)$  の作る 3 角形を底面とし、頂点を  $(0, 0, c)$  とする三角錐 (4 面体) です。



この 4 面体の底面以外の 3 つの面のうち 2 枚は座標平面であって垂直ですから残る 1 枚 (題意の平面) の高さが問題になります。

点  $(x, y, 0)$  を底面内の点としてこの点での平面の高さを  $z$  とすると、点  $(x, y, z)$  は平面上になければなりませんから

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{すなわち、} \quad z = c \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

となっているはずです。

従って題意の立体の体積 (これを  $V$  とします) は、4 面体の底面である上図の領域  $D$  上で  $c \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$  を積分すれば求まる事になります。

領域  $D$  の斜辺は  $y = -\frac{b}{a}x + b$  ですから、この領域は例えば縦切りにすれば不等式：

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq -\frac{b}{a}x + b \\ 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

で表す事が出来、これを元に体積を計算すると

$$\begin{aligned} V &= \iint_D c \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) dx dy \\ &= \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} c \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) dy dx \\ &= c \int_0^a \left[ y - \frac{x}{a}y - \frac{y^2}{2b} \right]_0^{-\frac{b}{a}x+b} dx \\ &= c \int_0^a \left\{ \left( -\frac{b}{a}x + b \right) - \frac{x}{a} \left( -\frac{b}{a}x + b \right) - \frac{1}{2b} \left( -\frac{b}{a}x + b \right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{bc}{2a^2} \int_0^a \left\{ 2(-ax + a^2) - 2x(-x + a) - (-x + a)^2 \right\} dx \\ &= \frac{bc}{2a^2} \int_0^a (x^2 - 2ax + a^2) dx \\ &= \frac{bc}{2a^2} \left[ \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^a \\ &= \frac{abc}{6} \end{aligned}$$

となってこれが答えです。

【解答例その 2 スライス法】 この立体を高さ  $z$  の  $xy$ -平面に平行な平面でスライスするとそれは直線  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \frac{z}{c}$  と “ $x, y$ -軸” で囲まれた 3 角形になります。つまりこれは 3 点

$$(0, 0), \left( 0, b \left( 1 - \frac{z}{c} \right) \right), \left( a \left( 1 - \frac{z}{c} \right), 0 \right)$$

を頂点とする 3 角形ですから ( $z$ -座標は省略します)、その面積  $S(z)$  は

$$S(z) = \frac{1}{2}ab \left( 1 - \frac{z}{c} \right)^2$$

になり、これに微小な厚み  $dz$  を掛けて  $0 \leq z \leq c$  の範囲で足し合わせれば (積分すれば) 問題の体積が求まります。従って

$$\begin{aligned} V &= \int_0^c \frac{1}{2}ab \left( 1 - \frac{z}{c} \right)^2 dz \\ &= \left[ -\frac{1}{6}abc \left( 1 - \frac{z}{c} \right)^3 \right]_0^c \\ &= \frac{1}{6}abc \end{aligned}$$

となります。

□

基本演習 3 [教科書 問題 8.3(2)] 曲面  $z = x^2 + y^2$  と平面  $z = 4$  で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

【解答例その1 千切り法】 この曲面と平面の交わったところは  $z = 4, x^2 + y^2 = 4$  と云う円周になっています。従って題意の立体はこの円盤と、曲面  $z = x^2 + y^2$  の  $x^2 + y^2 \leq 4$  の部分が囲んだ立体となっています。また下にある曲面の方は円柱  $x^2 + y^2 \leq 4$  の中にすっぽり入っていて、この立体を  $xy$ -平面に射影すると円  $x^2 + y^2 \leq 4$  となります。よって求める体積  $V$  は  $(x, y)$ -平面の領域  $x^2 + y^2 \leq 4$  上で  $4 - (x^2 + y^2)$  を積分すれば求める事が出来ます。

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (4 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - r^2) r d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) dr \\ &= 2\pi \left[ 2r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^2 \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

【解答例その2 スライス法】 水平にスライスして1枚1枚の体積を求めそれを足し合わせる方法でやってみましょう。

この立体を高さ  $z$  の平面でスライスすると断面は  $x^2 + y^2 \leq z$  と云う円盤になっています。ただし高さ  $z$  が  $z < 0$  や  $4 < z$  のところでスライスしても立体と交わりません。

従って、求める立体の体積  $V$  はこの断面の面積  $\pi z$  に微小な厚み  $dz$  を掛けて0から4まで足し合わせたものになっています。

よって

$$V = \int_0^4 \pi z dz = \left[ \frac{\pi}{2} z^2 \right]_0^4 = 8\pi$$

です。

□

基本演習 4 次の不等式が表す立体  $K$  の体積を求めてください。

$$K : (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq xy$$

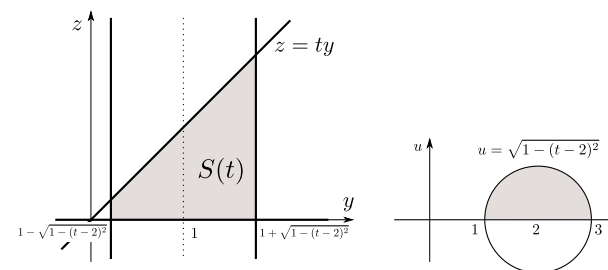
【解答例その1 スライス法  $x$  軸に垂直に】 問題の立体を平面  $x = t$  で切った切り口を考えます。切り口は不等式：

$$(y-1)^2 \leq 1 - (t-2)^2, \quad 0 \leq z \leq ty$$

で表されます。また切断面が存在するのは

$$1 \geq (t-2)^2, \quad \text{すなわち} \quad 0 \geq t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$$

のときですから  $1 \leq t \leq 3$  のときで、以下の左図のような台形です：



従ってその面積  $S(t)$  は

$$\begin{aligned} S(t) &= 2\sqrt{1 - (t-2)^2} \cdot \frac{1}{2} \left\{ t \left( 1 + \sqrt{1 - (t-2)^2} \right) + t \left( 1 - \sqrt{1 - (t-2)^2} \right) \right\} \\ &= 2t\sqrt{1 - (t-2)^2} \end{aligned}$$

です。従って求める体積  $V$  は

$$V = \int_1^3 S(t) dt = \int_1^3 2(t-2)\sqrt{1 - (t-2)^2} dt + 4 \int_1^3 \sqrt{1 - (t-2)^2} dt$$

ですが、第1の積分は合成関数の微分になっており、第2の積分は円の上半分の面積(上右図)ですから

$$V = \left[ \frac{2}{3} \{ 1 - (t-2)^2 \}^{\frac{3}{2}} (-1) \right]_1^3 + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

が分かります ( $y$  軸に垂直にスライスしてもほぼ同様の状況と思われるので省略します)。

【解答例その2 スライス法  $z$  軸に垂直に】問題の立体を平面  $z = t$  で切った切り口を考えます。切り口は不等式：

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1, \quad 0 \leq t \leq xy$$

で表されますが、この断面積を計算するのは難しいでしょう。そもそも円周と双曲線の交点を求めるのも超ハードです。従って、ここまで見た時点で、この方法は悪手だと気づき、撤退すべきです。

【解答例その3 千切り法】曲面  $z = xy$  と  $xy$ -平面の交わりは  $x$  軸と  $y$  軸であって、これらは円柱の外部にありますから、問題の立体の  $xy$  平面への正射影は円全体になります。

従って体積は次の2重積分を計算することになります（以前やった問題です）：

$$\iint_{(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1} xy \, dx dy$$

被積分関数を  $f$  とします。平行移動しても積分の値は変わらないので、

$$x - 2 = v, \quad y - 1 = w$$

と置けば、平行移動後の積分領域は  $v^2 + w^2 \leq 1$  となり、また平行移動後の被積分関数  $\tilde{f}(v, w)$  は

$$\tilde{f}(v, w) = f(v+2, w+1) = (v+2)(w+1)$$

となるので、

$$\iint_{(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1} xy \, dx dy = \iint_{v^2 + w^2 \leq 1} (v+2)(w+1) dv dw$$

です。ここで  $v = r \cos \theta$ ,  $w = r \sin \theta$  と極座標変換すれば、積分領域は  $r$  と  $\theta$  の不等式：

$$\begin{cases} 0 < r \leq 1 \\ 0 < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

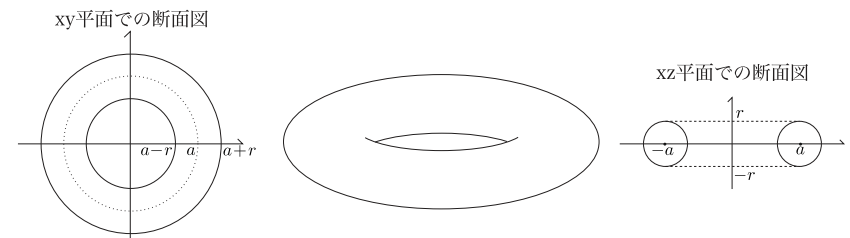
で表され、この極座標変換では  $dx dy = r dr d\theta$  なので

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \theta + 2)(r \sin \theta + 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 \cos \theta \sin \theta + r^2 \cos \theta + 2r^2 \sin \theta + 2r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4} r^4 \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{3} r^3 \cos \theta + \frac{2}{3} r^3 \sin \theta + r^2 \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{4} \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{3} \cos \theta + \frac{2}{3} \sin \theta + 1 \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{8} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \cos \theta + \frac{2}{3} \sin \theta + 1 \right) d\theta \\ &= \left[ -\frac{1}{16} \cos 2\theta + \frac{1}{3} \sin \theta - \frac{2}{3} \cos \theta + \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

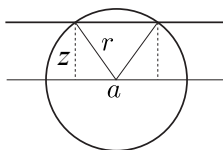
が得られます。

□

基本演習 5 図のドーナツ (torus) の体積を求めて下さい：



このトーラスを高さ  $z$  で切った断面は半径  $a \pm \sqrt{r^2 - z^2}$  の 2 つの円で挟まれた領域となるので、断面積  $S(z)$  は



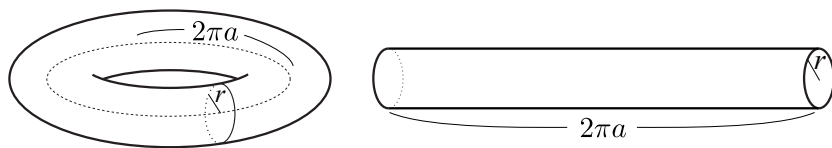
$$S(z) = \pi \left( a + \sqrt{r^2 - z^2} \right)^2 - \pi \left( a - \sqrt{r^2 - z^2} \right)^2 = 4a\pi\sqrt{r^2 - z^2}$$

です。従って求める体積  $V$  は、この断面積を  $0 \leq z \leq r$  の範囲で積分して 2 倍すれば得られる事になり、

$$V = 2 \int_0^r 4a\pi\sqrt{r^2 - z^2} dz = 8a\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - z^2} dz = 2a\pi^2 r^2 = 2\pi a \cdot \pi r^2$$

である事が分かります。  $\square$

これは、底面の半径が  $r$ 、高さが  $2\pi a$  の円柱と同じ体積であることが分かります。



これは半径  $a \pm r$  の同心円に挟まれた部分の面積が

$$\pi(a+r)^2 - \pi(a-r)^2 = 4\pi ar = 2\pi a \cdot 2r$$

であって、縦・横が  $2r \cdot 2\pi a$  であるような長方形の面積と一致している事実を多次元化したものになっています。

実は 1 辺  $\frac{\pi a}{2}$  の正方形の周りに半径  $r$  の円柱をぐるっと 1 周させて出来る立体（下図左）の体積も、簡単な計算により（下右図参照）、トーラスや長さ  $2\pi a$  の円柱と全く同じ体積であることが分かります。

