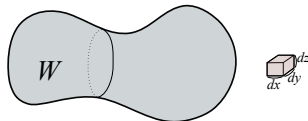


12 立体の体積

12.1 いろいろな体積計算法

12.1.1 みじん切り法

3次元空間内の領域（立体） W の体積 V を求める問題を考えます。



W を縦／横／高さが dx, dy, dz である微小キューブに細分化し（みじん切り）、一つの体積 $dx dy dz$ を全部（領域 W 内で）足し合わせれば、

$$V = \iiint_W dx dy dz$$

となりますが、この3重積分を累次積分に直して計算しなければなりません。その為には領域 W を不等式で表現する必要があります。

12.1.2 千切り法

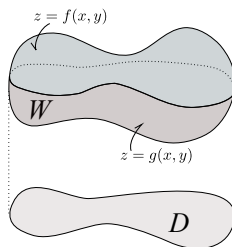
例えば立体 W が $(x, y) \in D$ において $g(x, y) \leq f(x, y)$ が成り立っている様な2枚の曲面 $z = f(x, y), z = g(x, y)$ によって

$$W : \begin{cases} g(x, y) \leq z \leq f(x, y), \\ (x, y) \in D \end{cases}$$

と書いていたとすると、3重積分を1次元と2次元に分解して

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left\{ \int_{g(x, y)}^{f(x, y)} dz \right\} dx dy \\ &= \iint_D \underbrace{\{f(x, y) - g(x, y)\}}_{\text{高さ}} \underbrace{dx dy}_{\text{微小底面積}} \end{aligned}$$

とする事が出来ます。



これは丁度、領域 W を z -軸に平行に千切りにしたと考えれば良く、ある点 $(x, y, 0)$ を通る1本の極細い“いもけんび”の体積は、底面積 $dx dy$ に高さ $f(x, y) - g(x, y)$ を掛けたものになっていて、これを xy -平面の領域 D 内で全部足し合わせた格好になっています。つまり、千切りにした時の切る範囲がこの領域 D であって、これはこの3次元領域 W を z -軸の上の方から見た時に xy -平面に射影してどの範囲になっているかと言うものになっているはずで

後はこの D での2重積分を更に累次積分に直して計算していけば良い事になります。

この様に3次元領域 W の体積を千切り法によって計算するには、まずこの領域を z -軸方向から見て xy -平面に射影した2次元領域 D がどんな領域になるのかきちんと見極める必要があります、これが2重積分の積分範囲になります。

そしてその範囲内で、点 $(x, y, 0)$ を通る z -軸に平行な直線を考えてこの直線が領域 W と交わっているのが z で言ってどの範囲であるのか（ $g(x, y) \leq z \leq f(x, y)$ など）を調べなければなりません。まあこれは3次元での“たて切り”と言えるでしょうか。

12.1.3 スライス法

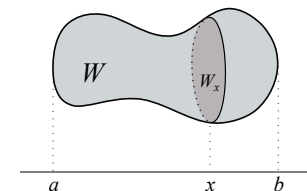
あるいは、 W が別のタイプの不等式：

$$W : \begin{cases} (y, z) \in W_x \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

で表される場合は、3重積分を2次元と1次元に分解して

$$V = \int_a^b \underbrace{\left\{ \iint_{W_x} dy dz \right\}}_{\text{断面積}} \underbrace{dx}_{\text{微小厚み}}$$

と計算されます。



これは丁度立体 W を x 座標一定の平面で切った切り口が（2次元の）領域 W_x になっていると云うことであって、スライスした1枚1枚の微小体積（内側の2重積分が断面

積であり、それに微小な厚み dx を掛けています) を足し合わせて全体の体積としています。

立体によっては、断面が三角形などの『面積が(積分しなくても)簡単に分かる』領域になっている場合があります、そういった場合はスライス方は有力な体積計算手段となります。

12.2 どちらを“上”と見るか

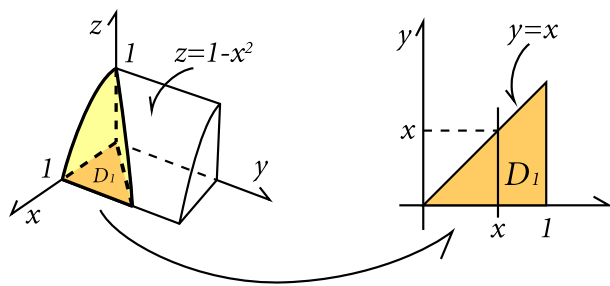
問題 12.1 [教科書 例題 8.3] 柱面 $z = 1 - x^2$ と 3つの平面 $y = x, y = 0, z = 0$ で囲まれた立体の $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ の部分の体積を求めて下さい。

【解答例その1 z -軸を垂直にした場合】 この立体 (W と云う名前にしておきます) を図示すると下左図のようになっており、立体を xy -平面に射影すると下右図の D_1 となっています。この領域内の点 (x, y) に対して z の範囲は $0 \leq z \leq 1 - x^2$ となりますから、 W は不等式：

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x^2 \\ (x, y) \in D_1 \end{cases}$$

で表されます。

従ってこの立体 W の体積 (これを V とします) は、積分範囲を D_1 、被積分関数を $1 - x^2 - 0$ として 2重積分を計算すれば求められます。



更にこの積分領域 D_1 を不等式で表現すると

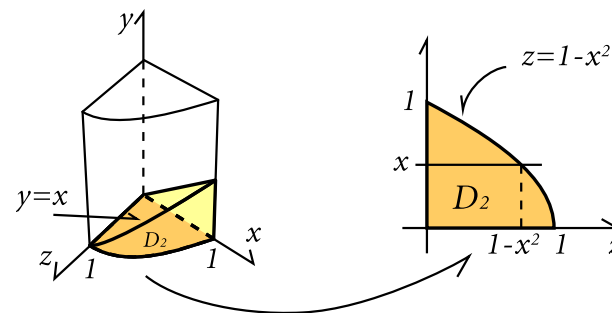
$$\begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ですから、これを使って累次積分を計算すれば

$$V = \iint_{D_1} (1 - x^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^x (1 - x^2) dy dx = \int_0^1 x(1 - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

が分かります。

【解答例その2 y -軸を垂直にした場合】 しかし別に z -軸方向を上だと思わなければならないわけではありません。仮に y -軸方向を上向きと考えた場合を図示してみると下図左のようになっており、 zx -平面への射影は下図右の領域 D_2 です。



この立体を不等式で表すと

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ (z, x) \in D_2 \end{cases}$$

となりますから、この場合は D_2 を積分領域として被積分関数 x を積分すれば立体の体積 V が得られるはずです。

領域 D_2 は不等式で表現すると

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

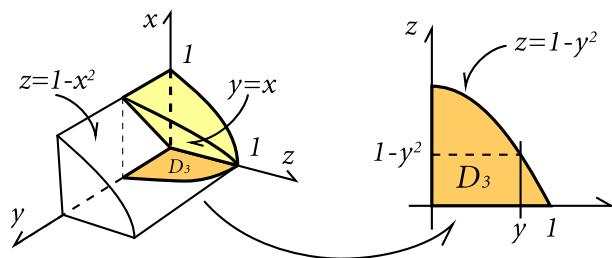
ですから、求める体積は

$$V = \iint_{D_2} x dz dx = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x dz dx = \int_0^1 x(1 - x^2) dx = \frac{1}{4}$$

です。

【解答例その3 x -軸を垂直にした場合】 折角ですから x -軸を上にした場合も見てみましょう。これはちょっと特殊で、上の曲面 $z = 1 - x^2$ (すなわち $x = \sqrt{1 - z}$) と下

の曲面 $x = y$ に挟まれた部分になっています：



この場合積分範囲がどのような領域になるかきちんと見定めなくてはなりません。この立体を上から見た時、 yz -平面への射影としてどんな風に見えるかと言うと、それは丁度 2 つの曲面の交線の射影と 2 つの座標軸が境界線になっている領域ですね。

2 曲面の交線が $z = 1 - x^2$, $x = y$ を連立させて $z = 1 - y^2$ になっている事に注意すればこの立体の射影は上図右の領域 D_3 になり、図の様にたて切りすれば不等式：

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - y^2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

で表現されます。これを使って累次積分を計算すれば

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D_3} (\sqrt{1-z} - y) dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-y^2} (\sqrt{1-z} - y) dz dy \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{2}{3}(1-z)^{\frac{3}{2}} - yz \right]_0^{1-y^2} dy \\ &= \int_0^1 \left\{ -\frac{2}{3}y^3 - y(1-y^2) + \frac{2}{3} \right\} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}y^3 - y + \frac{2}{3} \right) dy \\ &= \left[\frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となってやはり同じ答えが出てきます。

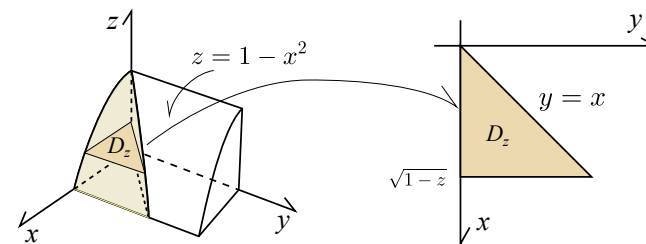
【解答例その4 スライス法 z -軸に垂直に切った場合】 全く別の方法で（2重積分すら使いません）体積を計算してみましょう。

この立体を xy -平面に平行な平面でスライスして 1 枚 1 枚の極薄い（厚さ dz ）スライスの体積を計算し、それを全て足し合わせれば立体の体積になるはず。

この立体を例えば z の高さでスライスすると、 z を定数と思えば

$$\begin{cases} x^2 = 1 - z, & \text{すなわち, } x = \sqrt{1-z} \\ y = x \\ y = 0 \end{cases}$$

で囲まれた領域が断面になりますがこれは図の通り三角形で、その面積は簡単に $\frac{1}{2}(1-z)$ であることが分かります。

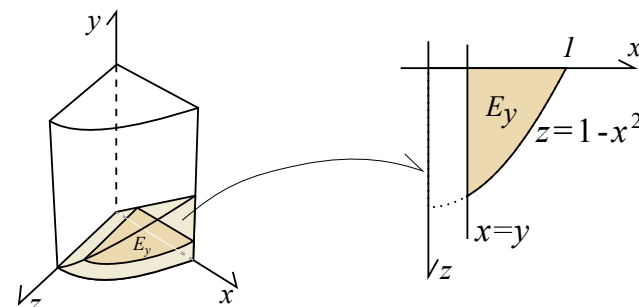


これに微小な厚み dz を掛ければ 1 枚のスライスの体積になりますから、これを $z = 0$ から $z = 1$ まで全部足し合わせれば

$$V = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z) dz = \left[-\frac{1}{4}(1-z)^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

が得られ、先の 3 つの計算結果と一致しています。

【解答例その5 y -軸に垂直に切った場合】 y -軸方向を上向きと考えた場合に立体 W を図示してみると下図左のようになっており、 y -軸に垂直に切った断面は下図右の領域 E_y です。



断面 E_y の面積は

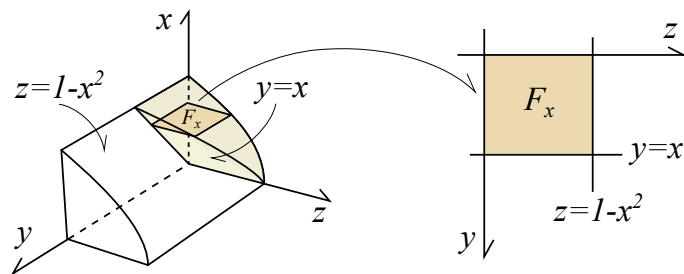
$$(\text{断面積}) = \int_y^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_y^1 = \frac{2}{3} - y + \frac{1}{3}y^3$$

ですから、求める体積は

$$V = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - y + \frac{1}{3}y^3 \right) dy = \left[\frac{2}{3}y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{12}y^4 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

です。

【解答例その6 x -軸に垂直に切った場合】 x -軸に垂直に切った場合、4 直線 $z = 1 - x^2$, $y = x$, $z = 0$, $y = 0$ で囲まれた長方形が切り口 F_x です。



従って断面積は $x(1 - x^2)$ であり、求める体積 V は

$$V = \int_0^1 x(1 - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

です。

□

12.3 Exercise

+ 千切り法とスライス法の両方を試してみてください +

基本演習 1 次の不等式の表す立体 K の体積を求めてください。

$$K : \begin{cases} e^x \leq y \leq 8 \\ 0 \leq z \leq x \end{cases}$$

基本演習 2 [教科書 問題 8.3(1)] 平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ と 3 つの座標平面で囲まれた立体の体積を求めて下さい (ただし、 a, b, c は正の定数とします)。

基本演習 3 [教科書 問題 8.3(2)] 曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 4$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

基本演習 4 次の不等式が表す立体 K の体積を求めてください。

$$K : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq xy$$

基本演習 5 図のドーナツ (torus) の体積を求めて下さい :

