

13 立体の体積 その2

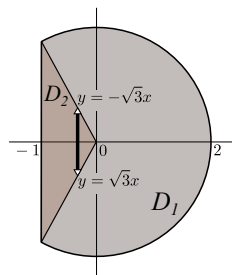
13.1 円柱と平面

例題 13.1 不等式：

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad z \geq 0, \quad z \leq x + 1$$

の表す立体 R の体積 V を求めて下さい。

【千切り法】立体 R の xy 平面への正射影は図の領域 $D = D_1 \cup D_2$ であり、



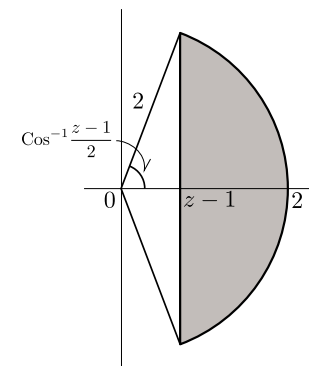
求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x+1) dx dy \\ &= \iint_{D_1} (x+1) dx dy + \iint_{D_2} (x+1) dx dy \\ &= \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_0^2 (r \cos \theta + 1) r dr d\theta + \int_{-1}^0 \int_{\sqrt{3}x}^{-\sqrt{3}x} (x+1) dy dx \\ &= \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{8}{3} \cos \theta + 2 \right) d\theta + \int_{-1}^0 (-2\sqrt{3})x(x+1) dx \\ &= \left[\frac{8}{3} \sin \theta + 2\theta \right]_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} + \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} x^3 + \sqrt{3} x^2 \right]_0^{-1} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{3} + \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ &= 3\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

となります。わかりやすい立体なので、余計なことは考えずに単純に千切りにすればこの様に簡単に計算されます。

【スライス法】この立体を z 軸に垂直な平面群でスライスします。ただし、以下の様になり大変になります。

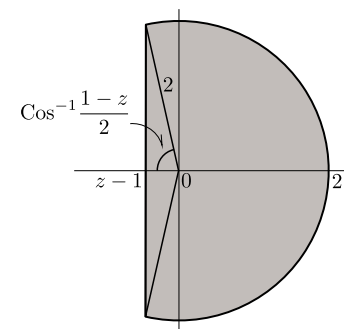
$1 \leq z \leq 3$ においては断面は以下の図の通りであり、



その面積 $S(z)$ は

$$S(z) = 4 \cos^{-1} \frac{z-1}{2} - (z-1) \sqrt{4 - (z-1)^2}$$

です。また $0 \leq z \leq 1$ においては断面は



の通りであって、断面積は

$$\begin{aligned} S(z) &= 2\pi + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{1-z}{2} \right) + (1-z) \sqrt{4 - (1-z)^2} \\ &= 4\pi - 4 \cos^{-1} \frac{1-z}{2} + (1-z) \sqrt{4 - (1-z)^2} \end{aligned}$$

です。従って求める体積は

$$V = \int_1^3 \left\{ 4\cos^{-1}\frac{z-1}{2} - (z-1)\sqrt{4-(z-1)^2} \right\} dz \\ + \int_0^1 \left\{ 4\pi - 4\cos^{-1}\frac{1-z}{2} + (1-z)\sqrt{4-(1-z)^2} \right\} dz$$

で計算されます。ここで

$$\int \cos^{-1}\frac{z-1}{2} dz = (z-1)\cos^{-1}\frac{z-1}{2} - \int (z-1) \left\{ -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{z-1}{2})^2}} \right\} dz \\ = (z-1)\cos^{-1}\frac{z-1}{2} - \int \frac{z-1}{\sqrt{4-(z-1)^2}} dz \\ = (z-1)\cos^{-1}\frac{z-1}{2} - \sqrt{4-(z-1)^2} + C$$

$$\int \cos^{-1}\frac{1-z}{2} dz = (z-1)\cos^{-1}\frac{1-z}{2} - \int (z-1) \left\{ -\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{1-z}{2})^2}} \right\} dz \\ = (z-1)\cos^{-1}\frac{1-z}{2} + \int \frac{z-1}{\sqrt{4-(z-1)^2}} dz \\ = (z-1)\cos^{-1}\frac{1-z}{2} + \sqrt{4-(z-1)^2} + C$$

$$\left\{ (4-(z-1)^2)^{\frac{3}{2}} \right\}' = -3(z-1)\sqrt{4-(z-1)^2}$$

によれば、

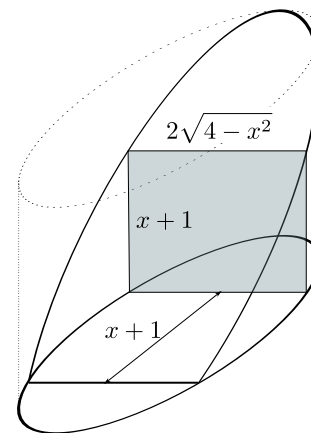
$$\int_1^3 \left\{ 4\cos^{-1}\frac{z-1}{2} - (z-1)\sqrt{4-(z-1)^2} \right\} dz \\ = \left[4(z-1)\cos^{-1}\frac{z-1}{2} - 4\sqrt{4-(z-1)^2} + \frac{1}{3} \{4-(z-1)^2\}^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 \\ = \frac{16}{3} \\ \int_0^1 \left\{ 4\pi - 4\cos^{-1}\frac{1-z}{2} + (1-z)\sqrt{4-(1-z)^2} \right\} dz \\ = \left[4\pi z - 4(z-1)\cos^{-1}\frac{1-z}{2} - 4\sqrt{4-(z-1)^2} + \frac{1}{3} \{4-(z-1)^2\}^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ = 4\pi - 8 + \frac{8}{3} - 4\cos^{-1}\frac{1}{2} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ = \frac{8\pi}{3} - \frac{16}{3} + 3\sqrt{3}$$

となって

$$V = 3\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}$$

が得られます。

【スライス法 その2】今度は x 軸に垂直にスライスしてみましょう。この立体を x 軸に垂直に切ると、断面は縦 $x+1$ 、横 $2\sqrt{4-x^2}$ の長方形ですから、



求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^2 2(x+1)\sqrt{4-x^2}dx \\ &= \int_{-1}^2 2x\sqrt{4-x^2}dx + 2 \int_{-1}^2 \sqrt{4-x^2}dx \end{aligned}$$

です。しかしここで後者は円の面積・扇形の面積・三角形の面積から計算できて

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^2 + 4\pi - \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \\ &= 3\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

となります。後者の積分を上手く回避すればこれが一番やりやすい形でしょうか。□

13.2 回転放物面と平面

例題 13.2 [問題集 8.14] 回転放物面 $2az = x^2 + y^2$ と平面 $z = x$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい ($a > 0$)。

【解答例】 放物面と平面の交わった部分は連立方程式：

$$\begin{cases} 2az = x^2 + y^2 \\ z = x \end{cases}$$

の解全体になりますが、第 2 式を第 1 式に代入すれば

$$x^2 + y^2 = 2ax \quad \text{すなわち} \quad (x-a)^2 + y^2 = a^2$$

となるため、交わった部分の (x, y) -平面への射影は円周となっている（交わり自体は楕円周）事が分かります。

また放物面は原点に向かってすばまって行く形をしていますから問題となっている立体を (x, y) -平面に射影したものは円： $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$ です。

従って求める体積（これを V とする）は、この円を積分範囲として 2 つの曲面 $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$, $z = x$ に挟まれた部分の体積を求めれば良く、この積分範囲内では平面が常に放物面より上にある事に注意すれば

$$V = \iint_{(x-a)^2 + y^2 \leq a^2} \left(x - \frac{x^2 + y^2}{2a} \right) dx dy$$

となり、ここで極座標に変換すると

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} \left(r \cos \theta - \frac{r^2}{2a} \right) r dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3 \cos \theta - \frac{1}{8a} r^4 \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{8a^3}{3} \cos^4 \theta - 2a^3 \cos^4 \theta \right\} d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} a^3 \end{aligned}$$

が得られます ($\cos^4 \theta$ の積分は倍角の公式を 2 回使って計算すれば良いので省略)。□

Exercise

●円柱と平面

基本演習 1 [教科書 練習問題 8.3(1)] $x, y, z \geq 0$ の部分で平面 $z = x + y$ および柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

基本演習 2 [問題集 8.23(3)] 不等式 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq x + y$ で表される立体の体積を求めて下さい。

基本演習 3 [問題集 8.23(1)] 不等式 $x^2 + y^2 \leq 1$, $-y \leq z \leq 2y$ で表される立体の体積を求めて下さい。

基本演習 4 [教科書 練習問題 8.5(1)] 円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ および 2 平面 $z = 0$, $x + z = a$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい ($a > 0$)。

基本演習 5 [問題集 8.24] 円柱 $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$ と 2 つの平面 $z = \pm ax$ で囲まれる部分の体積を求めて下さい ($a > 0$)。

●回転放物面と平面

基本演習 6 [問題集 8.22(1)] 回転放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = y$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

基本演習 7 回転放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $ax + by + cz = d$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

13.3 Exercise 解答例

基本演習 1 [教科書 練習問題 8:3(1)] $x, y, z \geq 0$ の部分で平面 $z = x + y$ および柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

【解答例】 題意の立体は円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ の $x, y, z \geq 0$ の部分のうち、平面 $z = x + y$ (≥ 0) より下にある部分ですから、求める体積を V とすれば、 V は (x, y) -平面内の領域 $D: x^2 + y^2 \leq a^2, x, y \geq 0$ 上で関数 $x + y$ を積分すれば求められ、

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x + y) dx dy \\ &= \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \theta + r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^a r^2 [\sin \theta - \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \int_0^a 2r^2 dr \\ &= \left[\frac{2}{3} r^3 \right]_0^a \\ &= \frac{2}{3} a^3 \end{aligned}$$

です。

□

基本演習 2 [問題集 8.23(3)] 不等式 $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq x + y$ で表される立体の体積を求めて下さい。

【解答例】 2 平面 $z = 0, z = x + y$ の交線は xy -平面上の直線 $y = -x$ ですが、この直線によって 2 つに分割された平面のうち、点 $(1, 1)$ を含む方においてのみ不等式 $0 \leq x + y$ が成り立っています。

従って求める体積を V とすれば、 V は (x, y) -平面内の領域 D :

$$D: \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

上で関数 $x + y$ を積分すれば求められ、

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x + y) dx dy \\ &= \int_0^a \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (r \cos \theta + r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^a r^2 [\sin \theta - \cos \theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dr \\ &= \int_0^a 2\sqrt{2} r^2 dr \\ &= \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} r^3 \right]_0^a \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3 \end{aligned}$$

です。

□

基本演習 3 [問題集 8.23(1)] 不等式 $x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq z \leq 2y$ で表される立体の体積を求めて下さい。

【解答例】 これは円柱を 2 平面で切ったものですが、第 2 の不等式に注意すれば $-y \leq 2y$ であって 2 平面がこのような上下関係にあるのは $y \geq 0$ の部分だけです。従って求める体積を V とすれば

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y} \{2y - (-y)\} dx dy \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 3r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \int_0^\pi [r^3]_0^1 \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= 2 \end{aligned}$$

が分かります。

□

基本演習 4 [教科書 練習問題 8.5(1)] 円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ および 2 平面 $z = 0, x + z = a$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい ($a > 0$)。

【解答例 通常の 2 重積分法】 $a > 0$ の場合、 (x, y) -平面内の円 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 内の点 (x, y) に対して $a - x \geq 0$ なので、この円の上では平面 $x + z = a$ すなわち $z = a - x$ は平面 $z = 0$ より上にあります。

従って求める立体の体積 V は、この円を積分範囲として $a - x - 0$ を積分すれば良く、

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (a-x) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (a-r \cos \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} ar^2 - \frac{1}{3} r^3 \cos \theta \right]_0^a d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} a^3 - \frac{1}{3} a^3 \cos \theta \right) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} a^3 \theta - \frac{1}{3} a^3 \sin \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi a^3 \end{aligned}$$

です。

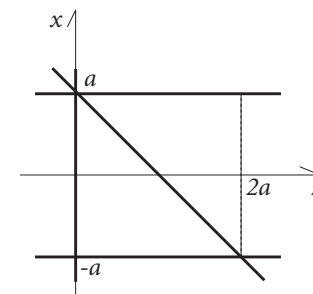
【解答例 スライス法】 $x = (\text{定数})$ と云う平面でスライスすると、断面の境界は

$$y^2 = a^2 - x^2, \quad z = a - x, \quad z = 0$$

となり、これら 4 直線が囲む長方形が断面になります。この面積は $(a-x) \times 2\sqrt{a^2 - x^2}$ ですからこれに微小な厚み dx を掛けて $-a \leq x \leq a$ の範囲で積分すれば良い事が分かります。

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a 2(a-x)\sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= 2a \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx + \int_{-a}^a (-2x)\sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= 2a \left[\frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) \right]_{-a}^a + \left[\frac{2}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-a}^a \\ &= a^3 \sin^{-1} 1 - a^3 \sin^{-1} (-1) \\ &= \pi a^3 \end{aligned}$$

【解答例 よく考えると】 この立体を zx -平面に垂直な方向から見ると、丁度下图のように円柱が 2 平面で切り取られている事が分かります。



従って求める体積は底面の半径が a であって高さが $2a$ の円柱の体積の半分ですから

$$V = \frac{1}{2} \pi a^2 \cdot 2a = \pi a^3$$

です。 □

基本演習 5 [問題集 8.24] 円柱 $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$ と 2 つの平面 $z = \pm ax$ で囲まれる部分の体積を求めて下さい ($a > 0$)。

【解答例】 円柱は z 軸方向に伸びています。また、この円柱と xy -平面との交わりは第 1 象限にあるので、円柱と交わる部分に於ける平面 $z = ax$ は平面 $z = -ax$ よりも上にあります。従って求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \iint_{(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2} \{ax - (-ax)\} dx dy \\ &= \iint_{(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2} 2ax dx dy \end{aligned}$$

となりますが、平行移動しても体積は変わらないから

$$= \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} 2a(x+a) dx dy$$

となり、ここで極座標に変換すれば

$$\begin{aligned}
 &= a \int_0^{2\pi} \int_0^a (2r \cos \theta + 2a) r \, dr \, d\theta \\
 &= a \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} r^3 \cos \theta + ar^2 \right]_0^a d\theta \\
 &= a \int_0^{2\pi} \left(\frac{2a^3}{3} \cos \theta + a^3 \right) d\theta \\
 &= a^4 \left[\frac{2}{3} \sin \theta + \theta \right]_0^{2\pi} \\
 &= 2\pi a^4
 \end{aligned}$$

となってこれが答えです。

□

基本演習 6 [問題集 8.22(1)] 回転放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = y$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

【解答例】 放物面と平面の交わった部分は連立方程式：

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = y \end{cases}$$

の解全体になりますが、第 2 式を第 1 式に代入すれば

$$x^2 + y^2 = y \quad \text{すなわち} \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

となるため、交わった部分の (x, y) -平面への射影は円周（交わり自体は楕円周）となっています。

放物面は原点に向かってすばまって行く形をしていますから問題となっている立体を (x, y) -平面に射影すると円： $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ になります。

従って求める体積（これを V とする）は、この円を積分範囲として 2 つの曲面 $z = x^2 + y^2$, $z = y$ に挟まれた部分の体積を求めれば良く、この積分範囲内では平面が常に放物面より上にある事に注意すれば

$$V = \iint_{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}} (y - x^2 - y^2) dx dy$$

となり、ここで極座標に変換すると

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} (r \sin \theta - r^2) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \sin \theta - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{\sin \theta} d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{3} \sin^4 \theta - \frac{1}{4} \sin^4 \theta \right\} d\theta \\
 &= \frac{1}{12} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta \\
 &= \frac{\pi}{32}
 \end{aligned}$$

が得られます（ $\sin^4 \theta$ の積分は倍角の公式を 2 回使って計算すれば良いので省略）。 □

基本演習 7 回転放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $ax + by + cz = d$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

【解答例】 $c = 0$ のとき、この平面は（ z -軸を上下方向として）垂直な平面なので、問題の回転放物面とは交わりはしますが立体を囲む事はありません。

$c \neq 0$ のとき、放物面と平面の交わった部分は連立方程式：

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ ax + by + cz = d \end{cases}$$

の解全体ですが、第 2 式から $z = \frac{1}{c}(d - ax - by)$ としてこれを第 1 式に代入すれば

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= \frac{1}{c}(d - ax - by) \\
 x^2 + \frac{a}{c}x + y^2 + \frac{b}{c}y &= \frac{d}{c} \\
 \left(x + \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2c}\right)^2 &= \frac{d}{c} + \frac{a^2 + b^2}{4c^2}
 \end{aligned}$$

となるため、 $\frac{d}{c} + \frac{a^2 + b^2}{4c^2} < 0$ の場合にはこれを満たす点はなく、放物面と平面は交わらない事が分かります。

$\frac{d}{c} + \frac{a^2 + b^2}{4c^2} = 0$ の場合には 2 曲面は 1 点のみで交わるため、囲む立体は 1 点であり、体積は 0 です。

$\frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2} > 0$ の場合には今見た様に交わった部分の (x, y) -平面への射影は円周（交わり自体は楕円周）となっており、放物面が原点に向かってすぼまって行く形をしている事と合わせて考えれば、問題となっている立体を (x, y) -平面に射影したものは円： $\left(x + \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2c}\right)^2 \leq \frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2}$ になっています。

従って求める体積（これを V とする）は、この円を積分範囲として 2 つの曲面 $z = x^2 + y^2$, $z = \frac{1}{c}(d - ax - by)$ に挟まれた部分の体積を求めれば良く、平面が常に放物面より上にある事に注意すれば

$$V = \iint_{\left(x + \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2c}\right)^2 \leq \frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2}} \left\{ \frac{1}{c}(d - ax - by) - (x^2 + y^2) \right\} dx dy$$

ですのでこれを計算しましょう。まず全体を平行移動することにします。

$$x + \frac{a}{2c} = v, \quad y + \frac{b}{2c} = w$$

と置けば、平行移動変換のヤコビアンは 1 なので、

$$\begin{aligned} &= \iint_{v^2+w^2 \leq \frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2}} \left(\frac{1}{c} \left\{ d - a \left(v - \frac{a}{2c} \right) - b \left(w - \frac{b}{2c} \right) \right\} - \left\{ v - \frac{a}{2c} \right\}^2 - \left\{ w - \frac{b}{2c} \right\}^2 \right) dv dw \\ &= \iint_{v^2+w^2 \leq \frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2}} \left(\frac{d}{c} - \frac{a}{c}v + \frac{a^2}{2c^2} - \frac{b}{c}w + \frac{b^2}{2c^2} - v^2 + \frac{a}{c}v - \frac{a^2}{4c^2} - w^2 + \frac{b}{c}w - \frac{b^2}{4c^2} \right) dv dw \\ &= \iint_{v^2+w^2 \leq \frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2}} \left(\frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{2c^2} - v^2 - w^2 - \frac{a^2+b^2}{4c^2} \right) dv dw \\ &= \iint_{v^2+w^2 \leq \frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2}} \left(\frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2} - v^2 - w^2 \right) dv dw \end{aligned}$$

となり、ここで極座標に変換すると

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2}}} \left(\frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2} - r^2 \right) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2} \right) r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{\sqrt{\frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2}}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2} \right)^2 \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{c} + \frac{a^2+b^2}{4c^2} \right)^2 \end{aligned}$$

が得られます。

□