13　立体の体積　その２

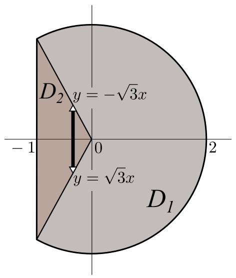
13.1　円柱と平面

例題 **13.1** 不等式：

$$x^2+y^2 \leq 4, \quad z \geq 0, \quad z \leq x+1$$

の表す立体 R の体積 V を求めて下さい。

【千切り法】立体 R の xy 平面への正射影は図の領域 $D = D_1 \cup D_2$ であり、



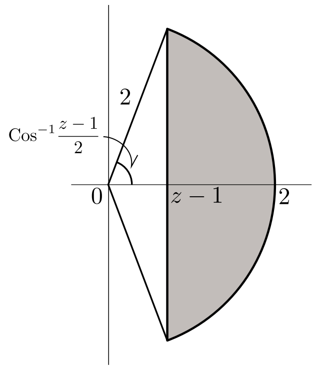
求める体積は

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (x+1)dxdy \\
&= \iint_{D_1} (x+1)dxdy + \iint_{D_2} (x+1)dxdy \\
&= \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_0^2 (r\cos\theta+1)r\,drd\theta + \int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{3}x}^{-\sqrt{3}x}(x+1)dydx \\
&= \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{8}{3}\cos\theta+2\right)d\theta + \int_{-1}^{0}(-2\sqrt{3})x(x+1)dx \\
&= \left[\frac{8}{3}\sin\theta+2\theta\right]_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} + \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}x^3+\sqrt{3}x^2\right]_0^{-1} \\
&= \frac{8\sqrt{3}}{3}+\frac{8\pi}{3}+\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3} \\
&= 3\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}
\end{aligned}$$

となります。わかりやすい立体なので、余計なことは考えずに単純に千切りにすればこの様に簡単に計算されます。

【スライス法】この立体を z 軸に垂直な平面群でスライスします。ただし、以下の様にかなり大変になります。

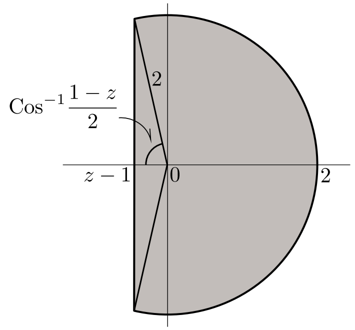
$1 \leq z \leq 3$ においては断面は以下の図の通りであり、



その面積 $S(z)$ は

$$S(z) = 4\mathrm{Cos}^{-1}\frac{z-1}{2} - (z-1)\sqrt{4-(z-1)^2}$$

です。また $0 \leq z \leq 1$ においては断面は



の通りであって、断面積は

$$\begin{aligned}
S(z) &= 2\pi + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1-z}{2}\right) + (1-z)\sqrt{4-(1-z)^2} \\
&= 4\pi - 4\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1-z}{2} + (1-z)\sqrt{4-(1-z)^2}
\end{aligned}$$

です。従って求める体積は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^3 \left\{4\mathrm{Cos}^{-1}\frac{z-1}{2} - (z-1)\sqrt{4-(z-1)^2}\right\}dz \\
&\quad + \int_0^1 \left\{4\pi - 4\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1-z}{2} + (1-z)\sqrt{4-(1-z)^2}\right\}dz
\end{aligned}
$$

で計算されます。ここで

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{Cos}^{-1}\frac{z-1}{2}dz &= (z-1)\mathrm{Cos}^{-1}\frac{z-1}{2} - \int (z-1)\left\{-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{z-1}{2}\right)^2}}\right\}dz \\
&= (z-1)\mathrm{Cos}^{-1}\frac{z-1}{2} - \int \frac{z-1}{\sqrt{4-(z-1)^2}}dz \\
&= (z-1)\mathrm{Cos}^{-1}\frac{z-1}{2} - \sqrt{4-(z-1)^2} + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{Cos}^{-1}\frac{1-z}{2}dz &= (z-1)\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1-z}{2} - \int (z-1)\left\{-\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-z}{2}\right)^2}}\right\}dz \\
&= (z-1)\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1-z}{2} + \int \frac{z-1}{\sqrt{4-(z-1)^2}}dz \\
&= (z-1)\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1-z}{2} + \sqrt{4-(z-1)2} + C
\end{aligned}
$$

$$
\left\{\left(4-(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}' = -3(z-1)\sqrt{4-(z-1)^2}
$$

によれば、

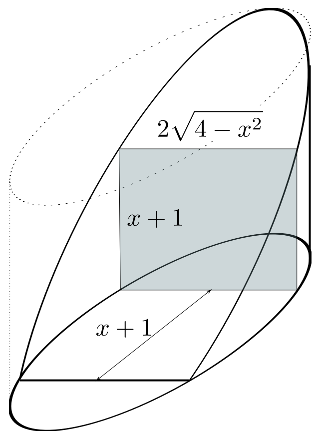
$$
\begin{aligned}
&\int_1^3 \left\{4\mathrm{Cos}^{-1}\frac{z-1}{2} - (z-1)\sqrt{4-(z-1)^2}\right\}dz \\
&= \left[4(z-1)\mathrm{Cos}^{-1}\frac{z-1}{2} - 4\sqrt{4-(z-1)^2} + \frac{1}{3}\left\{4-(z-1)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 \\
&= \frac{16}{3} \\
&\int_0^1 \left\{4\pi - 4\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1-z}{2} + (1-z)\sqrt{4-(1-z)^2}\right\}dz \\
&= \left[4\pi z - 4(z-1)\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1-z}{2} - 4\sqrt{4-(z-1)^2} + \frac{1}{3}\left\{4-(z-1)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= 4\pi - 8 + \frac{8}{3} - 4\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{2} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} \\
&= \frac{8\pi}{3} - \frac{16}{3} + 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

となって

$$
V = 3\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}
$$

が得られます。

【スライス法　その２】今度は x 軸に垂直にスライスしてみましょう。この立体を x 軸に垂直に切ると、断面は縦 $x+1$、横 $2\sqrt{4-x^2}$ の長方形ですから、



求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{2} 2(x+1)\sqrt{4-x^2}dx \\ &= \int_{-1}^{2} 2x\sqrt{4-x^2}dx + 2\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}dx \end{aligned}$$

です。しかしここで後者は円の面積・扇形の面積・三角形の面積から計算できて

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2} + 4\pi - \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \\ &= 3\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

となります。後者の積分を上手く回避すればこれが一番やりやすい形でしょうか。 □

13.2　回転放物面と平面

例題 **13.2 [** 問題集　**8.14]** 回転放物面 $2az = x^2 + y^2$ と平面 $z = x$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい（$a > 0$）。

【解答例】　放物面と平面の交わった部分は連立方程式：

$$\begin{cases} 2az = x^2 + y^2 \\ z = x \end{cases}$$

の解全体になりますが、第２式を第１式に代入すれば

$$x^2 + y^2 = 2ax \quad \text{すなわち} \quad (x-a)^2 + y^2 = a^2$$

となるため、交わった部分の (x,y)-平面への射影は円周となっている（交わり自体は楕円周）事が分かります。

また放物面は原点に向かってすぼまって行く形をしていますから問題となっている立体を (x,y)-平面に射影したものは円：$(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$ です。

従って求める体積（これを V とする）は、この円を積分範囲として２つの曲面 $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$, $z = x$ に挟まれた部分の体積を求めれば良く、この積分範囲内では平面が常に放物面より上にある事に注意すれば

$$V = \iint_{(x-a)^2+y^2 \leq a^2} \left(x - \frac{x^2+y^2}{2a}\right) dxdy$$

となり、ここで極座標に変換すると

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2a\cos\theta} \left(r\cos\theta - \frac{r^2}{2a}\right) r\,drd\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}r^3\cos\theta - \frac{1}{8a}r^4\right]_{0}^{2a\cos\theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{8a^3}{3}\cos^4\theta - 2a^3\cos^4\theta\right\} d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}a^3 \end{aligned}$$

が得られます（$\cos^4\theta$ の積分は倍角の公式を２回使って計算すれば良いので省略）。 □

Exercise

●円柱と平面

基本演習 **1 [** 教科書　練習問題 **8;3(1)]** $x, y, z \geq 0$ の部分で平面 $z = x + y$ および柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

基本演習 **2 [** 問題集　**8.23(3)]** 不等式 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq x + y$ で表される立体の体積を求めて下さい。

基本演習 **3 [** 問題集　**8.23(1)]** 不等式 $x^2 + y^2 \leq 1$, $-y \leq z \leq 2y$ で表される立体の体積を求めて下さい。

基本演習 **4 [** 教科書　練習問題 **8.5(1)]** 円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ および２平面 $z = 0$, $x + z = a$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい（$a > 0$）。

基本演習 **5 [** 問題集　**8.24]** 円柱 $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$ と２つの平面 $z = \pm ax$ で囲まれる部分の体積を求めて下さい（$a > 0$）。

●回転放物面と平面

基本演習 **6 [** 問題集　**8.22(1)]** 回転放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = y$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

基本演習 **7** 回転放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $ax + by + cz = d$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。