14　立体の体積　その３

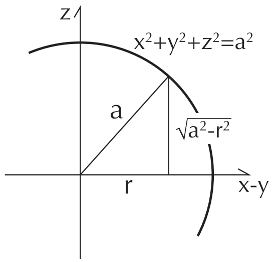
14.1　円柱と球・円柱など

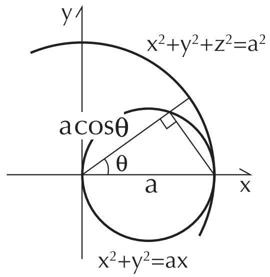
例題 14.1 [教科書　練習問題 8.5(2)] 円柱面 $x^2+y^2=ax$ と球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ で囲まれた領域の体積を求めて下さい。

【解答例】　問題の立体は (x,y)-平面に関して面対称なので、上の部分（z-座標が正の部分）の体積を求めて２倍すれば良い事が分かります。

　また、$a<0$ でも $a>0$ でも同じ体積になるので $a>0$ とします（$a=0$ の時は考えてもしょうがないですね)。

　求める体積を V とすれば





$$\frac{1}{2}V=\iint_{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\le\frac{a^2}{4}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

ですが、ここで極座標に変換すれば、ヤコビアンが r である事に注意して

$$\begin{aligned}
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,drd\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} \frac{1}{-3}\left\{(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right\}'\,drd\theta\\
&=-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta}d\theta\\
&=-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a^3\sqrt{\sin^2\theta}^{\,3}-a^3)d\theta
\end{aligned}$$

となります。ここで積分区間上では $\sin\theta<0$ となる事もある事に注意して

$$=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\theta|^3)d\theta$$

ですが、被積分関数は偶関数であり積分範囲は原点対称な区間なので積分値は片側の２倍で良く、結局絶対値は外れて

$$\begin{aligned}
&=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta\\
\frac{3}{4a^3}V&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta\\
&=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta\\
\frac{3}{4a^3}V-\frac{\pi}{2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\sin\theta-(-\sin\theta)\cos^2\theta\right\}d\theta\\
&=\left[\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
\frac{3}{4a^3}V&=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\\
V&=\frac{2\pi}{3}a^3-\frac{8a^3}{9}
\end{aligned}$$

となって体積が求まります。 □

Exercise

基本演習 1 [問題集　8.13] 円柱 $x^2+y^2\le b^2$ および球 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ の交わった部分の体積を求めて下さい（$a,b>0$)。

基本演習 2 [教科書　練習問題 8;3(2)] ２つの柱面 $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

基本演習 3 次の３本の円柱の交わる部分の体積を求めて下さい：

$$\begin{cases}C_1: x^2+y^2\le 1, & -\infty<z<\infty\\ C_2: y^2+z^2\le 1, & -\infty<x<\infty\\ C_3: z^2+x^2\le 1, & -\infty<y<\infty.\end{cases}$$

2020 定期試験

1 次の関数の極値を求めて下さい。

$$f(x,y)=x^2y+xy^2+y^3-y$$

2 点 (x,y) が円周 $x^2+y^2=1$ 上を動くとき、関数 $f(x,y)=x^3-y^2$ の最大値、最小値とそのときの x,y の値を求めて下さい。

3 $xy^2-x^2y+2=0$ で定まる陰関数 $y=y(x)$ の微分 $\dfrac{dy}{dx}$ を x,y で表して下さい。ただし、y を x の微分可能な関数として表せない点もあるでしょうが、そういった点は気にせずに、y を x の微分可能な関数として表せる点でどうなるかのみ答えて下さい。

4 次の累次積分を計算して下さい。

(1) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_0^y \mathrm{e}^{x-y}dx\right\}dy$　(2) $\displaystyle\int_0^3\left\{\int_0^{2-\frac{2}{3}x}\left(1-\frac{x+y}{3}\right)dy\right\}dx$

5 次の２重積分を累次積分に直すなどして計算して下さい。

(1) $\displaystyle\iint_{D_1}(x+y)dxdy,\quad D_1 : 0\le y\le x,\, 0\le x\le 1$

(2) $\displaystyle\iint_{D_2}\sqrt{x+y^2}dxdy,\quad D_2 : \sqrt{x}\le y\le 1,\, 0\le x\le 1$

6 曲面 $z=3-x^2-y^2$ と xy-平面で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

2016 定期試験

7 $x^4-4xy+y^4=0$ によって定まる陰関数 $y(x)$ について $y'(x)$ を x,y で表して下さい。
　ただし、題意の陰関数が定まらない点もあるかも知れませんが、そう云った点は気にせず、陰関数が存在する点でどうなっているかのみ答えて下さい。

8 関数 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}y^2+xy-3y-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x$ の極値を求めて下さい。

9 $x^2+y^2=1$ のとき関数 $h(x,y)=x^3+\frac{1}{2}y^2-2x$ の最大値と最小値を求めて下さい。

10 次の積分を計算して下さい。

(1)$\displaystyle\int_1^3\int_0^1 xy\,dydx$　(2)$\displaystyle\iint_{x^2\le y\le 2-x}x^2dxdy$　(3)$\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le x}\sqrt{x}\,dxdy$

11 ４平面：$z=0,\, x=0,\, 3x+2y+6z=6,\, x-y+2z=2$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

12 ２本の円柱：$C_1 : x^2+y^2\le 1,\quad C_2 : y^2+z^2\le 1$ の交わった部分の体積を求めて下さい。

2015 定期試験

13 $G(x,y)=xy-1,\, F(x,y)=x^2+y^2$ として以下の問いに答えて下さい。

(1) 陰関数定理によれば、曲線 $G(x,y)=0$ 上の各点の近くで関係式 $G(x,y)=0$ によって y を x の微分可能な関数として表すことが出来ます。これを $y(x)$ と書くとき、$y'(x)$ を x,y を使って表して下さい。

(2) 条件 $G(x,y)=0$ のもとでの関数 $F(x,y)$ の極値を全て求めて下さい。

14 $f(x,y)=x^2y+xy^2+y^3-y$ の極値を全て求めて下さい。

15 次の累次積分の積分順序を交換してから計算して下さい。

(1) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_x^{2x}2x^2y\,dy\right\}dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2\left\{\int_0^1 xy^2dx\right\}dy$

16 次の２重積分を計算して下さい。

(1) $\displaystyle\iint_D(1-x^2)\,dxdy,\quad D:\begin{cases}0\le y\le x\\ 0\le x\le 1\end{cases}$　(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1}x^2y^2dxdy$

17 半径 $a>0$ の球が２つあり、中心間の距離が $2b>0$ であるとします。$a>b$ のときこの２つの球は交わりますが、その交わった部分の体積を求めて下さい。

2013 定期試験

18 $G(x,y)=x^2+4xy-y^2+11,\, F(x,y)=3x-4y$ として以下の問いに答えて下さい。
(1) 関係式 $G(x,y)=0$ の表す曲線上には $G_y(x,y)=0$ となる点はない事を証明して下さい。
(2) (1) の結果と陰関数定理によれば、曲線 $G(x,y)=0$ 上の各点の近くで関係式 $G(x,y)=0$ によって y を x の微分可能な関数として表すことが出来ます。これを $y(x)$ と書くとき、$y'(x)$ を x,y を使って表して下さい。
(3) 条件 $G(x,y)=0$ のもとでの関数 $F(x,y)$ の極値を全て求めて下さい。

19 $f(x,y)=(x+y)^3-12xy$ の極値を全て求めて下さい。

20 次の累次積分を計算して下さい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_0^y (3-x-y)dx\right\} dy$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_x^1 \sin(\pi y^2)dy\right\} dx$

21 次の２重積分を計算して下さい。

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy,\quad D:\begin{cases}-\sqrt{x}\le y\le \frac{1}{x}\\ 1\le x\le 2\end{cases}$　(2) $\displaystyle\iint_Q y\,dxdy,\quad Q:\begin{cases}0\le x+y\le 1\\ 0\le x-y\le 1\end{cases}$

22 xy-平面の第１象限内の有界領域 D は不等式：

$$\begin{cases}f(x)\le y\le g(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

で表されているとします（ただし、$a\le x\le b$ の範囲内で $0\le f(x)\le g(x)$ は成り立っているものとします）。領域 D を x-軸を中心として回転して得られる立体の体積 V が

$$V=\iint_D 2\pi y\,dxdy$$

で与えられる事を証明して下さい（x-軸に垂直な平面群でスライスして考えると良い）。

23 円柱 $(x-1)^2+y^2\le 1$ と円錐 $x^2+y^2\le z^2$ の交わった部分のうち $0\le z\le 2$ である部分の体積を求めて下さい。

2012 定期試験

24 $x^2+2xy-y^2+1=0$ であるときに $y'(x)$ を x,y で表して下さい。

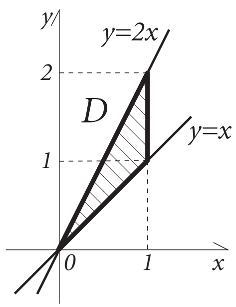
25 条件 $x^2+y^2=1$ のもとで関数 $xy-x$ の最大値・最小値を求めて下さい。

26 $f(x,y)=x^3+2x^2y-xy^2-4xy$ の極値を求めて下さい。

27 次の重積分を計算して下さい。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 (x\cos y+1)x\,dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_D 2x^2y\,dxdy$



28 次の重積分を極座標になおして求めて下さい：

$$\iint_{x^2+y^2\le 4,\,x\ge 0,y\ge 0} xy\,dxdy.$$

29 曲面 $z=x^2+y^2$ と平面 $z=3$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

2011 定期試験

30 $v(x,y)=y^2-x^2-1$、$w(x,y)=y^3+2x$ として以下の問いに答えて下さい。

(1) 曲線 $v(x,y)=0$ 上には $v_y(x,y)=0$ となる点はない事を示して下さい。

(2) 曲線 $v(x,y)=0$ 上の各点の近くで y を x の関数として表したときに（それを $y(x)$ と書くことにします）、$y'(x)$ を x と y を使って表して下さい。

(3) 陰関数の考え方を使ったローカルな１変数化を $W(x)=w(x,y(x))$ とするとき、$W'(x)=0$ となる（曲線 $v(x,y)=0$ 上の）点を求めて下さい。

(4) (3) で求めた各点において $W''(x)$ を計算し、$v(x,y)=0$ の条件のもとでの $w(x,y)$ の極値を求めて下さい。

31 $f(x,y)=x^3-5x^2+8x+y^2+2y$ の極値を求めて下さい。

32 次の２重積分を計算して下さい：

$$\iint_{y\le 2x,\,y\ge 2x^2}(3y^2-xy)dxdy.$$

33 不等式 $x^2+y^2\le y$ の表す領域を極座標による不等式で表現して下さい。

34 次の２重積分を計算して下さい：

$$\iint_{1\le x^2+y^2\le 4}\frac{1}{x^2+y^2}dxdy.$$

35 ２本の円柱：$x^2+y^2\le 1,\ y^2+z^2\le 1$ の交わった部分の体積を求めて下さい。

36 xyz-空間内の $x,y,z\ge 0$ の部分に於いて、

柱面：　$y+z^2=1,$
平面：　$x-z=0,$
平面：　$y=0,$
平面：　$x=0$

によって囲まれた立体 W の体積 V を求めて下さい。

Exercise 解答例

基本演習 **1 [問題集　8.13]** 円柱 $x^2 + y^2 \leq b^2$ および球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ の交わった部分の体積を求めて下さい（$a, b > 0$)。

【解答例】　$a \leq b$ である場合は、交わりは球全体となるのでその体積は $\frac{4\pi}{3}a^3$ です。

$b < a$ である場合は、求める体積 V は

$$V = 2\iint_{x^2+y^2\leq b^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$$

ですが、ここで $x = r\cos\theta, , y = r\sin\theta$ と置けば積分領域は不等式：

$$\begin{cases} 0 < r \leq b \\ 0 < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

で表され、またこの変換のヤコビアンは r なので

$$\begin{aligned}
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^b \sqrt{a^2 - r^2}\,drd\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{2}{-2\cdot 3}\left\{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right\}' drd\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left[(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^b d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left[(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_b^0 d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left\{a^3 - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}\right\} d\theta \\
&= \frac{4\pi}{3}\left\{a^3 - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}\right\}
\end{aligned}$$

である事が分かります。 □

基本演習 **2 [教科書　練習問題 8;3(2)]** ２つの柱面 $x^2+y^2 = a^2$, $x^2+z^2 = a^2$ $(a > 0)$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

【解答例その１】　題意の立体は (x, y)-平面に関して対称なので、その体積 V は (x, y)-平面内の円 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 上で関数 $\sqrt{a^2 - x^2}$ を積分したものの２倍である。更に (y, z)-平面、(x, z)-平面に関しても対称なので、結局 $x^2 + y^2 \leq a^2, x, y \geq 0$ の上での積分の８倍で良い。従って

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}V &= \int_{x^2+y^2\leq a^2,\, x,y\geq 0} \sqrt{a^2 - x^2}dxdy \\
&= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}dydx \\
&= \int_0^a (a^2 - x^2)dx \\
V &= 8\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a \\
&= \frac{16}{3}a^3
\end{aligned}$$

が分かります。

【解答例その２　スライス法】　問題の立体を x 軸に垂直な平面群でスライスすると、断面は正方形

$$-\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2}$$

になっており、この断面積は $4(a^2 - x^2)$ なので、これを $-a \leq x \leq a$ で積分すれば題意の体積 V が得られます：

$$V = \int_{-a}^a 4(a^2 - x^2)dx = 4\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^a = \frac{16}{3}a^3.$$

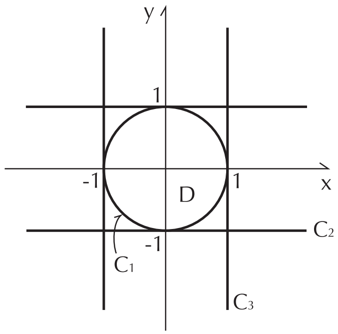
□

基本演習 3 次の３本の円柱の交わる部分の体積を求めて下さい：

$$\begin{cases} C_1 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad -\infty < z < \infty \\ C_2 : y^2 + z^2 \leq 1, \quad -\infty < x < \infty \\ C_3 : z^2 + x^2 \leq 1, \quad -\infty < y < \infty. \end{cases}$$

【解答例その１　通常の２重積分法】　xy-平面上の領域 D を $x^2 + y^2 \leq 1$ とすれば、題意の立体を xy-平面で切って上（z-軸正の側）から見れば下図の様になっていまして、D 上での C_2, C_3 の高さ $z > 0$ は

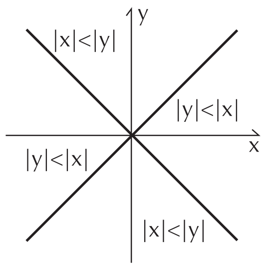
$$C_2 : z = \sqrt{1-y^2}, \quad C_3 : z = \sqrt{1-x^2}$$

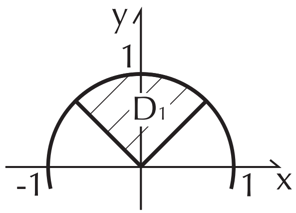


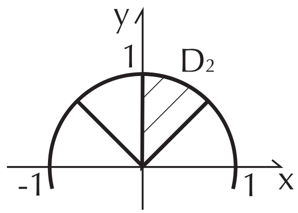
ですので、題意の立体の高さは xy-平面から上の部分で

$$\begin{cases} |y| < |x| \text{ のとき、} C_3 \text{ の方が低い} \\ |x| < |y| \text{ のとき、} C_2 \text{ の方が低い} \end{cases}$$

となっています。







そこで、上の図の様な平面領域 D_1 を考えれば、この上では C_3 よりも C_2 の方が低いので C_2 が題意の立体の屋根になっています。

また、C_2 と C_3 の交差部分の対称性を考えれば、D_1 より上の部分と同じ形のものが８個集まって題意の立体が出来上がっているため、この D_1 上の体積を求めてそれを８倍すれば良い事になります。

同様に対称性を考えて図の領域 D_2 を考えれば、結局求める体積 V はこの D_2 より上の部分の体積の１６倍と云う事になります。

$$V = 16 \iint_{D_2} \sqrt{1-y^2}dxdy$$

この２重積分の計算を以下の３通りの方法で見てみましょう。

【縦切り法】

$$\begin{aligned}
V &= 16 \iint_{D_2} \sqrt{1-y^2}dxdy \\
&= 16 \iint_{\begin{cases} x \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}} \sqrt{1-y^2}dxdy \\
&= 16 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}dydx \\
& \qquad \Downarrow \\
&= 16 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\mathrm{Sin}^{-1}y \right]_x^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= 8 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \sqrt{1-x^2}x + \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} - \mathrm{Sin}^{-1}x \right\} dx \\
&= 8 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2} - \mathrm{Sin}^{-1}x \right\} dx \\
&= 8 \left[x\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2} - x\mathrm{Sin}^{-1}x \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
& \qquad - 8 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= 16 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= -16 \left[\sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= 16 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= 16 - 8\sqrt{2}
\end{aligned}$$

となります。矢印のところの原始関数を知らなければ苦労するでしょう。

【横切り法】横切りの場合領域 D_2 は上下２つの領域にスプリットします：

$$D_{21}:\begin{cases}0\le x\le y\\ 0\le y\le\frac{1}{\sqrt2}\end{cases},\quad D_{22}:\begin{cases}0\le x\le\sqrt{1-y^2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\le y\le 1\end{cases}$$

従って

$$\begin{aligned}
V&=16\iint_{D_2}\sqrt{1-y^2}dxdy\\
\frac{1}{16}V&=\iint_{D_{21}}\sqrt{1-y^2}dxdy+\iint_{D_{22}}\sqrt{1-y^2}dxdy\\
&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\int_0^y\sqrt{1-y^2}dxdy+\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}dxdy\\
&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}y\sqrt{1-y^2}dy+\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^1(1-y^2)dy\\
&=\left[-\frac13(1-y^2)^{\frac32}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt2}}+\left[y-\frac13y^3\right]_{\frac{1}{\sqrt2}}^1\\
&=-\frac13\left(\frac{1}{2\sqrt2}-1\right)+\frac23-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{6\sqrt2}\\
&=1-\frac{1}{\sqrt2}\\
V&=16-8\sqrt2
\end{aligned}$$

となります。スプリットするので厄介かと思いきや、２つの積分が両方とも簡単な積分になってしまい、結果的にスプリットしない縦切りの時よりも簡単です。

【極座標】$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と置けば $dxdy=rdrd\theta$ ですから

$$\frac{V}{16}=\iint_{D_2}\sqrt{1-y^2}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}drd\theta$$

となりますが、ここで

$$\left\{\left(1-r^2\sin^2\theta\right)^{\frac32}\right\}'=\frac32(-2r\sin^2\theta)\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}$$

によれば

$$\begin{aligned}
\frac{V}{16}&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3\sin^2\theta}(1-r^2\sin^2\theta)^{\frac32}\right]_0^1d\theta\\
&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^3\theta}{3\sin^2\theta}d\theta\\
\frac{3V}{16}&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}d\theta\\
&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}(-1)d\omega+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\omega}d\omega+\left[\frac{1}{\sin\theta}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+[\sin\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&=[\tan\omega]_0^{\frac{\pi}{4}}+1-\sqrt2+1-\frac{1}{\sqrt2}\\
&=3-\frac{3\sqrt2}{2}\\
V&=16-8\sqrt2
\end{aligned}$$

となります。ふぅ。 □

【解答例その２　スライス法】　問題の立体を $z=p$ と云う平面で切って見ると、その平面上では

$$\begin{cases}C_1: x^2+y^2\le 1,\quad z=p\\ C_2: y^2\le 1-p^2,\quad -\infty<x<\infty\\ C_3: x^2\le 1-p^2,\quad -\infty<y<\infty\end{cases}$$

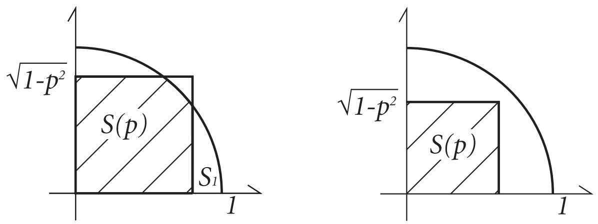
です。また、求める立体の体積は、その対称性から $0\le x, 0\le y, 0\le z$ の範囲の体積を求めてそれを８倍すれば良いのでこの範囲だけ考える事にすれば、更に

$$\begin{cases}x^2+y^2\le 1,\quad z=p\ge 0\\ 0\le y\le\sqrt{1-p^2},\quad 0\le x\le\sqrt{1-p^2}\end{cases}$$

となっています。

そこでこの $z=p$ 平面上の切り口を見ると、$0\le p\le\frac{1}{\sqrt2}$ では円板の４分の１と正方

形の共通部分であり、$\frac{1}{\sqrt{2}} \le p \le 1$ では１辺 $\sqrt{1-p^2}$ の正方形です（下図）:



$0 \le p \le 1/\sqrt{2}$　　$1/\sqrt{2} \le p \le 1$

まず $0 \le p \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ での切り口の面積 $S(p)$ を求めると、図の S_1 部分の面積は扇形から３角形を引いたもの：

$$S_1 = \pi\frac{\mathrm{Sin}^{-1}p}{2\pi} - \frac{1}{2}p\sqrt{1-p^2}$$

なので、全体としては４分の１円から２倍の S_1 を引けば良く、

$$S(p) = \frac{\pi}{4} - 2S_1 = \frac{\pi}{4} - \mathrm{Sin}^{-1}p + p\sqrt{1-p^2} \qquad \left(0 \le p \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

が得られます。

一方、$\frac{1}{\sqrt{2}} \le p \le 1$ では１辺 $\sqrt{1-p^2}$ の正方形である事からその面積は

$$S(p) = 1-p^2 \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \le p \le 1\right)$$

ですので、求める部分の体積 V は

$$\begin{aligned}
V =& 8\int_0^1 S(p)dp \\
=& 8\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\pi}{4} - \mathrm{Sin}^{-1}p + p\sqrt{1-p^2}\right)dp + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (1-p^2)dp\right\} \\
=& \sqrt{2}\pi - 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{Sin}^{-1}p\,dp + 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} p\sqrt{1-p^2}dp + 8\left[p - \frac{1}{3}p^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\
=& \sqrt{2}\pi - 8\left\{\left[p\,\mathrm{Sin}^{-1}p\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}dp\right\} \\
& + 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{-\frac{1}{3}(1-p^2)^{\frac{3}{2}}\right\}'dp + \frac{16}{3} - \frac{20}{3\sqrt{2}} \\
=& \sqrt{2}\pi - \left\{\sqrt{2}\pi + 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{1-p^2}\right)'dp\right\} \\
& - \frac{8}{3}\left[(1-p^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{16}{3} - \frac{10\sqrt{2}}{3} \\
=& -8\left[\sqrt{1-p^2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1\right) + \frac{16}{3} - \frac{10\sqrt{2}}{3} \\
=& 8 - 4\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{8}{3} + \frac{16}{3} - \frac{10\sqrt{2}}{3} \\
=& 16 - 8\sqrt{2}
\end{aligned}$$

となってさっきと同じ答えが得られます。

【解答例その３　改良スライス法】　問題の立体を高さ z の平面で切って見ると、その平面上では

$$\begin{cases} C_1 : x^2 + y^2 \le 1, \\ C_2 : -\sqrt{1-z^2} \le y \le \sqrt{1-z^2}, \quad -\infty < x < \infty \\ C_3 : -\sqrt{1-z^2} \le x \le \sqrt{1-z^2}, \quad -\infty < y < \infty \end{cases}$$

となっています。

$\frac{1}{\sqrt{2}} \le z \le 1$ ならば C_2, C_3 の部分（１辺 $2\sqrt{1-z^2}$ の正方形）が円 C_1 より小さい事に注意すれば、問題の立体の $\frac{1}{\sqrt{2}} \le z \le 1$ の部分の体積 V_{z+} はこの断面の正方形の面積を積分して得られることになります：

$$V_{z+} = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 4(1-z^2)dz = \left[4z - \frac{4}{3}z^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{8}{3} - \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{8-5\sqrt{2}}{3}.$$

同じ事が問題の立体の $\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ の部分や $\frac{1}{\sqrt{2}} \le y \le 1$ の部分、あるいは $-1 \le z \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の部分などについても言えるので、この６つは同じ体積であってそれらの合計は $16 - 10\sqrt{2}$ となります。

問題の立体から上に挙げた部分を除いた部分は立方体であり、１辺は $\sqrt{2}$ なので体積は $2\sqrt{2}$ になり、結局問題の立体全体の体積は $16 - 8\sqrt{2}$ となります。

この解法だと２重積分も逆三角関数も使いませんから高校生にでも実行出来る事になります。 □