14　立体の体積　その３

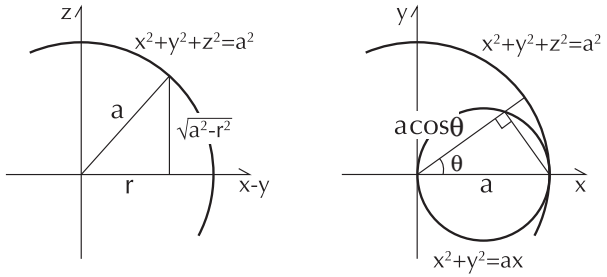
14.1　円柱と球・円柱など

例題 **14.1 [** 教科書　練習問題 **8.5(2)]** 円柱面 $x^2+y^2=ax$ と球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ で囲まれた領域の体積を求めて下さい。

【解答例】　問題の立体は (x,y)-平面に関して面対称なので、上の部分（z-座標が正の部分）の体積を求めて２倍すれば良い事が分かります。

また、$a<0$ でも $a>0$ でも同じ体積になるので $a>0$ とします（$a=0$ の時は考えてもしょうがないですね）。

求める体積を V とすれば



$$\frac{1}{2}V=\iint_{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\le\frac{a^2}{4}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

ですが、ここで極座標に変換すれば、ヤコビアンが r である事に注意して

$$\begin{aligned}
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,drd\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} \frac{1}{-3}\left\{(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right\}' drd\theta\\
&=-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta}d\theta\\
&=-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a^3\sqrt{\sin^2\theta}^3-a^3)d\theta
\end{aligned}$$

となります。ここで積分区間上では $\sin\theta<0$ となる事もある事に注意して

$$=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\theta|^3)d\theta$$

ですが、被積分関数は偶関数であり積分範囲は原点対称な区間なので積分値は片側の２倍で良く、結局絶対値は外れて

$$\begin{aligned}
&=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta\\
\frac{3}{4a^3}V&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta\\
&=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta\\
\frac{3}{4a^3}V-\frac{\pi}{2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\sin\theta-(-\sin\theta)\cos^2\theta\right\}d\theta\\
&=\left[\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
\frac{3}{4a^3}V&=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\\
V&=\frac{2\pi}{3}a^3-\frac{8a^3}{9}
\end{aligned}$$

となって体積が求まります。　□

Exercise

基本演習 **1 [** 問題集　**8.13]** 円柱 $x^2+y^2\le b^2$ および球 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ の交わった部分の体積を求めて下さい（$a,b>0$）。

基本演習 **2 [** 教科書　練習問題 **8;3(2)]** ２つの柱面 $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

基本演習 **3** 次の３本の円柱の交わる部分の体積を求めて下さい：

$$\begin{cases}C_1: x^2+y^2\le 1, & -\infty<z<\infty\\ C_2: y^2+z^2\le 1, & -\infty<x<\infty\\ C_3: z^2+x^2\le 1, & -\infty<y<\infty.\end{cases}$$

2020 定期試験

1 次の関数の極値を求めて下さい。

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 + y^3 - y$$

2 点 (x,y) が円周 $x^2+y^2=1$ 上を動くとき、関数 $f(x,y)=x^3-y^2$ の最大値、最小値とそのときの x,y の値を求めて下さい。

3 $xy^2 - x^2y + 2 = 0$ で定まる陰関数 $y = y(x)$ の微分 $\dfrac{dy}{dx}$ を x,y で表して下さい。ただし、y を x の微分可能な関数として表せない点もあるでしょうが、そういった点は気にせずに、y を x の微分可能な関数として表せる点でどうなるかのみ答えて下さい。

4 次の累次積分を計算して下さい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^y \mathrm{e}^{x-y} dx \right\} dy$ (2) $\displaystyle\int_0^3 \left\{ \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \left(1 - \frac{x+y}{3}\right) dy \right\} dx$

5 次の２重積分を累次積分に直すなどして計算して下さい。

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} (x+y) dxdy, \quad D_1 : 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1$

(2) $\displaystyle\iint_{D_2} \sqrt{x+y^2} dxdy, \quad D_2 : \sqrt{x} \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1$

6 曲面 $z = 3 - x^2 - y^2$ と xy-平面で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

2016 定期試験

7 $x^4 - 4xy + y^4 = 0$ によって定まる陰関数 $y(x)$ について $y'(x)$ を x,y で表して下さい。

ただし、題意の陰関数が定まらない点もあるかも知れませんが、そう云った点は気にせず、陰関数が存在する点でどうなっているかのみ答えて下さい。

8 関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{2}y^2 + xy - 3y - \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - x$ の極値を求めて下さい。

9 $x^2+y^2=1$ のとき関数 $h(x,y) = x^3 + \frac{1}{2}y^2 - 2x$ の最大値と最小値を求めて下さい。

10 次の積分を計算して下さい。

(1) $\displaystyle\int_1^3 \int_0^1 xy\, dydx$ (2) $\displaystyle\iint_{x^2 \leq y \leq 2-x} x^2 dxdy$ (3) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq x} \sqrt{x}\, dxdy$

11 ４平面：$z=0,\ x=0,\ 3x+2y+6z=6,\ x-y+2z=2$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

12 ２本の円柱：$C_1 : x^2+y^2 \leq 1, \quad C_2 : y^2+z^2 \leq 1$ の交わった部分の体積を求めて下さい。

2015 定期試験

13 $G(x,y) = xy - 1,\ F(x,y) = x^2 + y^2$ として以下の問いに答えて下さい。

(1) 陰関数定理によれば、曲線 $G(x,y)=0$ 上の各点の近くで関係式 $G(x,y)=0$ によって y を x の微分可能な関数として表すことが出来ます。これを $y(x)$ と書くとき、$y'(x)$ を x,y を使って表して下さい。

(2) 条件 $G(x,y)=0$ のもとでの関数 $F(x,y)$ の極値を全て求めて下さい。

14 $f(x,y) = x^2y + xy^2 + y^3 - y$ の極値を全て求めて下さい。

15 次の累次積分の積分順序を交換してから計算して下さい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_x^{2x} 2x^2y\, dy \right\} dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \left\{ \int_0^1 xy^2 dx \right\} dy$

16 次の２重積分を計算して下さい。

(1) $\displaystyle\iint_D (1-x^2)\, dxdy, \quad D : \begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ (2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2y^2 dxdy$

17 半径 $a > 0$ の球が２つあり、中心間の距離が $2b > 0$ であるとします。$a > b$ のときこの２つの球は交わりますが、その交わった部分の体積を求めて下さい。

2013 定期試験

18 $G(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 + 11,\ F(x,y) = 3x - 4y$ として以下の問いに答えて下さい。

(1) 関係式 $G(x,y)=0$ の表す曲線上には $G_y(x,y)=0$ となる点はない事を証明して下さい。

(2) (1) の結果と陰関数定理によれば、曲線 $G(x,y)=0$ 上の各点の近くで関係式 $G(x,y)=0$ によって y を x の微分可能な関数として表すことが出来ます。これを $y(x)$ と書くとき、$y'(x)$ を x,y を使って表して下さい。

(3) 条件 $G(x,y)=0$ のもとでの関数 $F(x,y)$ の極値を全て求めて下さい。

19 $f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$ の極値を全て求めて下さい。

20 次の累次積分を計算して下さい。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^y (3-x-y)dx \right\} dy$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_x^1 \sin(\pi y^2)dy \right\} dx$

21 次の２重積分を計算して下さい。

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y\, dxdy, \quad D: \begin{cases} -\sqrt{x} \le y \le \frac{1}{x} \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$ (2) $\displaystyle\iint_Q y\, dxdy, \quad Q: \begin{cases} 0 \le x+y \le 1 \\ 0 \le x-y \le 1 \end{cases}$

22 xy-平面の第１象限内の有界領域 D は不等式：

$$\begin{cases} f(x) \le y \le g(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$$

で表されているとします（ただし、$a \le x \le b$ の範囲内で $0 \le f(x) \le g(x)$ は成り立っているものとします)。領域 D を x-軸を中心として回転して得られる立体の体積 V が

$$V = \iint_D 2\pi y\, dxdy$$

で与えられる事を証明して下さい（x-軸に垂直な平面群でスライスして考えると良い)。

23 円柱 $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ と円錐 $x^2 + y^2 \le z^2$ の交わった部分のうち $0 \le z \le 2$ である部分の体積を求めて下さい。

2012 定期試験

24 $x^2 + 2xy - y^2 + 1 = 0$ であるときに $y'(x)$ を x, y で表して下さい。

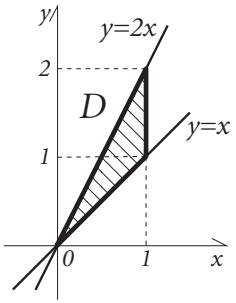
25 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで関数 $xy - x$ の最大値・最小値を求めて下さい。

26 $f(x,y) = x^3 + 2x^2y - xy^2 - 4xy$ の極値を求めて下さい。

27 次の重積分を計算して下さい。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 (x\cos y + 1)x\, dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_D 2x^2 y\, dxdy$



28 次の重積分を極座標になおして求めて下さい：

$$\iint_{x^2+y^2 \le 4,\, x \ge 0, y \ge 0} xy\, dxdy.$$

29 曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 3$ で囲まれた立体の体積を求めて下さい。

2011 定期試験

30 $v(x,y) = y^2 - x^2 - 1$、$w(x,y) = y^3 + 2x$ として以下の問いに答えて下さい。

(1) 曲線 $v(x,y) = 0$ 上には $v_y(x,y) = 0$ となる点はない事を示して下さい。

(2) 曲線 $v(x,y) = 0$ 上の各点の近くで y を x の関数として表したときに（それを $y(x)$ と書くことにします)、$y'(x)$ を x と y を使って表して下さい。

(3) 陰関数の考え方を使ったローカルな１変数化を $W(x) = w(x, y(x))$ とするとき、$W'(x) = 0$ となる（曲線 $v(x,y) = 0$ 上の）点を求めて下さい。

(4) (3) で求めた各点において $W''(x)$ を計算し、$v(x,y) = 0$ の条件のもとでの $w(x,y)$ の極値を求めて下さい。

31 $f(x,y) = x^3 - 5x^2 + 8x + y^2 + 2y$ の極値を求めて下さい。

32 次の２重積分を計算して下さい：

$$\iint_{y \le 2x,\, y \ge 2x^2} (3y^2 - xy) dxdy.$$

33 不等式 $x^2 + y^2 \le y$ の表す領域を極座標による不等式で表現して下さい。

34 次の２重積分を計算して下さい：

$$\iint_{1 \le x^2+y^2 \le 4} \frac{1}{x^2+y^2} dxdy.$$

35 ２本の円柱：$x^2 + y^2 \le 1$, $y^2 + z^2 \le 1$ の交わった部分の体積を求めて下さい。

36 xyz-空間内の $x, y, z \ge 0$ の部分に於いて、

柱面： $y + z^2 = 1$,
平面： $x - z = 0$,
平面： $y = 0$,
平面： $x = 0$

によって囲まれた立体 W の体積 V を求めて下さい。