

1 関数をべき級数で表すこと

初項 1、公比 r の等比数列の各項を無限に足して行くと

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

となりますが、これを左右入れ換えて更に『定数 r 』を『変数 x 』で置き換えれば

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (1.1)$$

となります。ちょっとした事です、この視点の転換によって

関数 $\frac{1}{1-x}$ は“無限次の多項式” $1 + x + x^2 + \cdots$ で表すことが出来るよ

と読み替える事が出来ます。

これから数回に渡ってこのような『関数を“無限次の多項式”で表すこと』を勉強しますが、いつまでも“無限次の多項式”なんて怪しい事を言っているわけにもいかないので、今後はこう云ったものを x の非負の整数べき x^n によって構成される級数（＝無限和）であることから『 x のべき級数』と呼ぶ事にします。

1.1 Sir Isaac Newton の計算

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots$$

と云うべき級数があります。これに何の意味があるのかは後でお話するとして、これを自乗するとどうなるでしょうか？ 実際に分配法則を使って展開してみましょう。括弧の中身が無限和ですから難しいですが、次数の低い方から順に書いて行く事は出来るでしょう：

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)x^4 \\ & \quad + \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{16}\right)x^6 + \left(\frac{35}{128} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{35}{128}\right)x^8 + \cdots \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots \end{aligned}$$

どうでしょう。最初の複雑な姿からは想像も出来ませんね、驚くべきことに係数はすべて 1 になってしまうんです。

しかもこれは先に見た (1.1) の x のところを x^2 に置き換えたもの：

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

であることが分かります。従って

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &= \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots\right)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots \end{aligned}$$

であったと考えられます。

しかしここで左辺の $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ はどこかでお会いしたことがなかったでしょうか？ そうです、これは $\sin^{-1}x$ の導関数でした。ならば、積分してやれば

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + \frac{5}{16}t^6 + \frac{35}{128}t^8 + \cdots\right) dt \\ \sin^{-1}x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \cdots \end{aligned}$$

であることが分かります。こんな関数もべき級数で表すことが出来ました。

1660 年代にかの Isaac Newton は、この $\sin^{-1}x$ のべき級数展開式を使って、逆関数である $\sin x$ のべき級数展開を求める方法を考え出しました。

$y = \sin^{-1}x$ とすれば

$$y = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \cdots \quad (1.2)$$

ですが、 x が小さいとき、右辺の高次の項を捨てて初項のみで近似すれば大体 $x \approx y$ です。このときの誤差を R とすれば $x = y + R$ なので、(1.2) にこれを代入すれば

$$y = (y + R) + \frac{1}{6}(y + R)^3 + \frac{3}{40}(y + R)^5 + \frac{5}{112}(y + R)^7 + \cdots$$

であって、ここでも R の高次の項は捨てて近似すれば

$$\begin{aligned} y &\approx (y + R) + \frac{1}{6}(y^3 + 3Ry^2) + \frac{3}{40}(y^5 + 5Ry^4) + \frac{5}{112}(y^7 + 7Ry^6) + \cdots \\ 0 &\approx \left(\frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \cdots\right) + \left(1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + \frac{5}{16}y^6 + \cdots\right)R \end{aligned}$$

従って

$$R \approx -\frac{\frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \cdots}{1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + \frac{5}{16}y^6 + \cdots}$$

となりますから、更にこの分母・分子でも初項だけとって後は無視して近似すれば

$$R \approx -\frac{1}{6}y^3, \quad \text{すなわち} \quad x \approx y - \frac{1}{6}y^3$$

と近似されることが分ります。

同様に今度はこの近似の誤差を R として、 $x = y - \frac{1}{6}y^3 + R$ を (1.2) に代入すれば

$$y = \left(y - \frac{1}{6}y^3 + R\right) + \frac{1}{6} \left(y - \frac{1}{6}y^3 + R\right)^3 + \frac{3}{40} \left(y - \frac{1}{6}y^3 + R\right)^5 + \dots$$

ですが、やはりここでも R の高次の項は捨てて近似して

$$y \approx \left(y - \frac{1}{6}y^3 + R\right) + \frac{1}{6} \left\{ \left(y - \frac{1}{6}y^3\right)^3 + 3R \left(y - \frac{1}{6}y^3\right)^2 \right\} \\ + \frac{3}{40} \left\{ \left(y - \frac{1}{6}y^3\right)^5 + 5R \left(y - \frac{1}{6}y^3\right)^4 \right\} + \dots$$

$$y \approx \left\{ \left(y - \frac{1}{6}y^3\right) + \frac{1}{6} \left(y - \frac{1}{6}y^3\right)^3 + \frac{3}{40} \left(y - \frac{1}{6}y^3\right)^5 + \dots \right\} \\ + \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{6}y^3\right)^2 + \frac{3}{8} \left(y - \frac{1}{6}y^3\right)^4 + \dots \right\} R$$

$$0 \approx \left\{ \left(-\frac{1}{12} + \frac{3}{40}\right)y^5 + \left(-\frac{3}{48} + \frac{5}{112}\right)y^7 + \dots \right\} \\ + \left\{ 1 + \frac{1}{2}y^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right)y^4 + \dots \right\} R$$

ですから

$$R \approx -\frac{-\frac{1}{120}y^5 - \frac{1}{56}y^7 + \dots}{1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{5}{24}y^4 + \dots}$$

となります。この分母・分子でも初項だけとって後は無視して近似すれば

$$R \approx \frac{1}{120}y^5$$

が得られますので結局

$$x \approx y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5$$

と近似されることが分ります。

この様な計算を繰り返すことによって、 $\sin^{-1}x$ の逆関数、即ち $\sin x$ のべき級数展開：

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots$$

が得られます。

1.2 部分積分

簡単な計算によって

$$\sin x = \int_0^x \cos t \, dt$$

であることは皆さんよくご存知でしょうが、右辺を部分積分すれば

$$\sin x = [(t-x)\cos t]_0^x - \int_0^x (t-x)(-\sin t)dt = x + \int_0^x (t-x)\sin t \, dt$$

が得られますので、これを繰り返して何度も部分積分を実行すると

$$\begin{aligned} \sin x &= x + \left[\frac{1}{2}(t-x)^2 \sin t \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2 \cos t \, dt \\ &= x - \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2 \cos t \, dt \\ &= x - \left[\frac{1}{3 \cdot 2}(t-x)^3 \cos t \right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{3 \cdot 2}(t-x)^3(-\sin t)dt \\ &= x - \frac{1}{3 \cdot 2}x^3 - \int_0^x \frac{1}{3 \cdot 2}(t-x)^3 \sin t \, dt \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \int_0^x \frac{1}{4!}(t-x)^4 \cos t \, dt \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \int_0^x \frac{1}{5!}(t-x)^5 \sin t \, dt \\ &\vdots \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\ &\quad + (-1)^n \int_0^x \frac{1}{(2n+1)!}(t-x)^{2n+1} \sin t \, dt \end{aligned}$$

となる事が分かります。さて、ここで $n \rightarrow \infty$ の極限值を取るとどうなるのでしょうか？

$$\left| (-1)^n \int_0^x \frac{1}{(2n+1)!}(t-x)^{2n+1} \sin t \, dt \right| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

と云う評価と階乗が指数よりもはるかに大きい事からすればこの最右辺は0に収束します (Exercise 参照)。従って、部分積分を無限に繰り返した場合、最後の積分の項はどんどん小さくなって行きますから結局

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots$$

と云う風に $\sin x$ をべき級数で表す事が出来ます (Newton の計算と結果は同じですね)。

1.3 微分方程式のべき級数解

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

とべき級数で表された関数 $f(x)$ が次の微分方程式：

$$f''(x) = -f(x), \quad f(0) = 0, f'(0) = 1 \quad (1.3)$$

を満たしていると仮定します。このとき実際にべき級数を項別に微分すれば

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots \\ f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots \end{aligned}$$

です。従って $f''(x)$ と $-f(x)$ で係数比較すれば

$$2a_2 = -a_0, \quad 3 \cdot 2a_3 = -a_1, \quad \dots, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n, \quad \dots$$

ですから、初期条件から分る $a_0 = f(0) = 0, a_1 = f'(0) = 1$ と合わせて漸化式：

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad a_0 = 0, a_1 = 1$$

を解けば係数 a_n が全て求まります。漸化式は1個飛ばしですから偶数の系列と奇数の系列に分けて計算すれば

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{1}{(2n)(2n-1)}a_{2n-2} & a_{2n+1} &= -\frac{1}{(2n-1+2)(2n-1+1)}a_{2n-1} \\ &= \frac{1}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}a_{2n-4} & &= \frac{1}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)}a_{2n-3} \\ &\vdots & &\vdots \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n)(2n-1)\cdots 2 \cdot 1}a_0 & &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n)\cdots 3 \cdot 2}a_1 \\ &= 0 & &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

が得られますので、結局

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

であることが分かりました。

しかし、微分方程式 (1.3) の解は、良く知られているように $\sin x$ しかありませんから、これにより $\sin x$ のべき級数展開が（3度目ですが）得られたことになります。

1.4 関数をべき級数で表して何が楽しいのか

等比級数の和の公式 (1.1) において $x \rightarrow -x^2$ と置き換えれば

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

ですが、左辺はどこかで見たことがあります。そう、これは $\tan^{-1}x$ の微分ですね。と云う事は、このまま両辺を積分すれば

$$\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots \quad (1.4)$$

となるんじゃないでしょうか？ 更に両辺で $x=1$ とすれば

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

あるいは

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots$$

と云う数式が得られます。

これは π の級数表示として古くから良く知られていて、Madhava-Gregory-Leibniz 級数 (Madhava of Sangamagrama, 1350-1425 頃 ; J. Gregory, 1671 ; G.W. von Leibniz, 1674) と呼ばれています。この右辺の無限和の有限項までの部分和を計算することによって π の近似値を計算することが出来ます。

ただしこれはあまり良い近似ではありません。右辺の第 n 項までの和を MGL_n と書いて何項か計算してみると以下のようになっています：

$$\begin{aligned} MGL_1 &= 4.00000 \dots & MGL_5 &= 3.33968 \dots & MGL_{100} &= 3.13159 \dots \\ MGL_3 &= 3.46666 \dots & MGL_{10} &= 3.04183 \dots & MGL_{200} &= 3.13659 \dots \end{aligned}$$

200 項ぐらい足してもまだせいぜい小数点以下1桁程度合っているに過ぎませんからね。つまり、正しい値に近づく速度が遅いのです。

注意深く tangent の加法法則：

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

を繰り返し適用すれば

$$\pi = 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239} \quad (\text{J.Machin, 1706})$$

となっている事が分りますが、右辺の Tan^{-1} のところを同様にべき級数展開して、有限項までの部分和を考えて π の近似値を得ることが出来ます。

半世紀ほど前 (1949)、人類史上初めてコンピュータを用いた本格的な計算が行われ、あの真空管約 1 万 8000 本、重量 30t の ENIAC が 70 時間かけて小数点以下 2037 桁まで正しく π の値を求めた時に使われた計算式がまさにこの Machin の式でした。右辺を級数展開して有限項までの和を計算すると、下の様になっています：

$$M_1 = \underline{3.1832635983264\dots} \quad M_5 = \underline{3.1415926824044\dots}$$

$$M_3 = \underline{3.1416210293251\dots} \quad M_9 = \underline{3.1415926535899\dots}$$

これは結構良い近似ですね。

Exercise

基本演習 1 等比級数の和の公式 (1.1) を自乗して $\frac{1}{(1-x)^2}$ のべき級数展開式を 3 次の項まで求めて下さい。

基本演習 2 (1) $\sqrt{1+x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ と置いてこれの自乗の展開式を左右辺で係数比較して $a_0, a_1, a_2, \dots$ を求め、 $\sqrt{1+x}$ のべき級数展開を (少なくとも x^4 の項まで) 求めて下さい。

(2) べき級数を 3 次の項までで打ち切って次のように近似することを考えます：

$$\sqrt{1+x} \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

(2-a) $x = 1$ として $\sqrt{2}$ の近似値を求めてください。

(2-b) $x = -\frac{1}{2}$ とすることを使って、 $\sqrt{2}$ の近似値を求めてください。その結果は (2-a) の結果と比べてどうでしょうか。

(2-c) $\sqrt{3}$ の近似値を、できるだけ上手く計算してください。

基本演習 3 今日やった部分積分を繰り返す方法で e^x のべき級数表現を求めて下さい。

発展演習 4 Tangent の加法公式を使って Machin の式：

$$\frac{\pi}{4} = 4\text{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \text{Tan}^{-1}\frac{1}{239}$$

を証明して下さい。

発展演習 5 今日見た Isaac Newton による逆関数のべき級数展開を求める方法を使って (1.4) から $\tan x$ のべき級数展開を求めて下さい (最初の 3 項程度で良いです)。

発展演習 6 任意の実数 a に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ であることを証明して下さい。

Exercise 解答

基本演習 1

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

基本演習 2

(1)

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots$$

(2-a) $\sqrt{2} \approx 1.4375$

(2-b) $\sqrt{2} \approx 1.4066$

(2-c) $\sqrt{3} \approx 1.7324$ など。

基本演習 3

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

発展演習 4

略。

発展演習 5

$$\tan x \approx x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

発展演習 6

略。