

1 関数をべき級数で表すこと

Exercise 解答例

基本演習 1 等比級数の和の公式 (1.1) を自乗して $\frac{1}{(1-x)^2}$ のべき級数展開式を求めて下さい。

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

ですから、両辺自乗すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots) \\ &= 1 + (1+1)x + (1+1+1)x^2 + (1+1+1+1)x^3 + \cdots \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \end{aligned}$$

となります。

ちなみに、両辺微分しても

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-x}\right)' &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \end{aligned}$$

となって同じ式が得られます。

□

基本演習 2 (1) $\sqrt{1+x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ と置いてこれの自乗の展開式を左右辺で係数比較して $a_0, a_1, a_2, \dots$ を求め、 $\sqrt{1+x}$ のべき級数展開を (少なくとも x^3 の項まで) 求めて下さい。

(2) べき級数を 3 次の項までで打ち切って次のように近似することを考えます：

$$\sqrt{1+x} \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

(2-a) $x = 1$ として $\sqrt{2}$ の近似値を求めてください。

(2-b) $x = -\frac{1}{2}$ とすることを使って、 $\sqrt{2}$ の近似値を求めてください。その結果は (2-a) の結果と比べてどうでしょうか。

(2-c) $\sqrt{3}$ の近似値を、できるだけ上手く計算してください。

(1) $\sqrt{1+x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ と置いて両辺を自乗すれば

$$\begin{aligned} 1+x &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ &= a_0^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)x + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_0a_2)x^2 \\ &\quad + (a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_0a_3)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

となりますが、まず $a_0^2 = 1$ ですから $a_0 = 1$ です ($x = 0$ での値を見れば分かる)。
次に

$$a_0a_1 + a_1a_0 = 1$$

ですから $a_1 = \frac{1}{2}$ であることが分かります。更に

$$\begin{aligned} 0 &= 2a_0a_2 + a_1^2 \\ &= 2a_2 + \frac{1}{4} \\ a_2 &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2a_0a_3 + 2a_1a_2 \\ &= 2a_3 - \frac{1}{8} \\ a_3 &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 \\
 &= 2a_4 + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \\
 a_4 &= -\frac{5}{128}
 \end{aligned}$$

などと順に係数が決定しますので

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots$$

となります。

(2-a)

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{23}{16} \approx 1.4375$$

(2-b)

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 - \frac{1}{2}} &\approx 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8 \cdot 4} - \frac{1}{16 \cdot 8} \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} &\approx \frac{91}{128} \\
 \sqrt{2} &\approx \frac{128}{91} \approx 1.4066
 \end{aligned}$$

これは (2-a) の近似より誤差が小さくなっています。

(2-c) そのまま $x = 2$ としてしまうと

$$\sqrt{3} \approx 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

となってしまうあまり良い近似ではありません (誤差が大きい)。

そこで次のように工夫してみましょう。まず (2-b) を参考にして $x = -\frac{2}{3}$ としてみ
ると

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 - \frac{2}{3}} &\approx 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{18} - \frac{1}{54} \\
 \frac{1}{\sqrt{3}} &\approx \frac{32}{54} \\
 \sqrt{3} &\approx \frac{54}{32} = 1.6875
 \end{aligned}$$

が得られます。ちょっと改善しましたね。

あるいは、 $x = \frac{1}{3}$ とすれば

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 + \frac{1}{3}} &\approx 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{72} + \frac{1}{432} \\
 \frac{2}{\sqrt{3}} &\approx \frac{499}{432} \\
 \frac{\sqrt{3}}{2} &\approx \frac{432}{499} \\
 \sqrt{3} &\approx \frac{864}{499} \approx 1.73146
 \end{aligned}$$

となって良い近似が得られますし、あるいは $x = -\frac{1}{4}$ とするのも良いでしょう：

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 - \frac{1}{4}} &\approx 1 - \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{8 \cdot 16} - \frac{1}{16 \cdot 64} \\
 \frac{\sqrt{3}}{2} &\approx \frac{887}{1024} \\
 \sqrt{3} &\approx \frac{1774}{1024} \approx 1.7324
 \end{aligned}$$

□

基本演習 3 今日やった部分積分を繰り返す方法で e^x のべき級数表現を求めて下さい。

まず

$$e^x - 1 = \int_0^x e^t dt$$

ですが、ここで右辺の被積分関数を $1 \cdot e^t$ と考えて部分積分すれば

$$e^x - 1 = [(t-x)e^t]_0^x - \int_0^x (t-x)e^t dt = x - \int_0^x (t-x)e^t dt$$

が得られますので、これを繰り返して何度も部分積分を実行すると

$$\begin{aligned} &= x - \left[\frac{1}{2}(t-x)^2 e^t \right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2 e^t dt \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \frac{1}{2}e^t dt \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \left[\frac{1}{3 \cdot 2}(t-x)^3 e^t \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{3 \cdot 2}(t-x)^3 e^t dt \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2}x^3 - \int_0^x \frac{1}{3 \cdot 2}(t-x)^3 e^t dt \\ &\quad \vdots \\ &= x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{1}{n!}(t-x)^n e^t dt \end{aligned}$$

となる事が分かります。

このままでも展開式がどうなるか分かるわけですが、きちんと証明するためには最後の項が $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束することを言わなくてはなりません。しかし、

$$\left| (-1)^n \int_0^x \frac{1}{n!}(t-x)^n e^t dt \right| \leq \int_0^x \frac{|t-x|^n}{n!} e^t dt \leq \int_0^x \frac{x^n}{n!} e^x dt = \frac{x^n}{n!} \cdot x e^x$$

と云う評価と階乗が指数よりもはるかに大きい事からすればこの最右辺は 0 に収束します。従って、部分積分を無限に繰り返した場合、最後の積分の項はどんどん小さくなって行きますから結局

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

と云う風に指数関数をべき級数で表す事が出来ます。

□

発展演習 4 Tangent の加法公式を使って Machin の式：

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

を証明して下さい。

$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{5}$ と置けば、 $\tan$ の加法定理：

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

から、

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \tan 4\theta = \frac{\frac{5}{12} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{5}{12^2}} = \frac{\frac{10}{12}}{\frac{144-25}{144}} = \frac{120}{119} \\ \tan \left(4\theta - \tan^{-1} \frac{1}{239} \right) &= \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119 \cdot 239}} = \frac{120 \cdot 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120} = 1 \end{aligned}$$

となって、結局この角 $4\theta - \tan^{-1} \frac{1}{239}$ は $\tan$ が 1 であることが分かりました。

また、 $\tan \frac{\pi}{12} = \alpha$ と置けば、 $\alpha > 0$ であって

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{6} &= \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} \\ 1 - \alpha^2 &= 2\sqrt{3}\alpha \\ (\alpha + \sqrt{3})^2 &= 4 \\ \alpha &= 2 - \sqrt{3} \approx 0.267 > 0.2 = \tan \theta \end{aligned}$$

ですから、

$$0 < \theta < \frac{\pi}{12}, \quad \text{従って} \quad 0 < 4\theta < \frac{\pi}{3}$$

であり、また

$$\frac{1}{239} < \frac{120}{119} = \tan 4\theta$$

によれば $4\theta > \tan^{-1} \frac{1}{239}$ ですから

$$0 < 4\theta - \tan^{-1} \frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}$$

であって、この範囲では $4\theta - \tan^{-1} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ である事がわかります。

□

発展演習 5 今日見た Isaac Newton による逆関数のべき級数展開を求める方法を使って (1.4) から $\tan x$ のべき級数展開を求めて下さい (最初の 3 項程度で良いです)。

$y = \tan^{-1} x$ とすれば

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

なので、まず大雑把に $x \approx y$ と近似されます。このときの誤差を R とすれば $x = y + R$ なのでこれを上の式に代入すれば

$$y = (y + R) - \frac{1}{3}(y + R)^3 + \frac{1}{5}(y + R)^5 - \frac{1}{7}(y + R)^7 + \cdots$$

となります。ここで R の 2 乗以上は無視して展開すれば

$$y \approx y + R - \frac{1}{3}(y^3 + 3y^2R) + \frac{1}{5}(y^5 + 5y^4R) - \frac{1}{7}(y^7 + 7y^6R) + \cdots$$

$$0 \approx (1 - y^2 + y^4 - y^6 + \cdots)R + \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7 + \cdots\right)$$

$$R \approx \frac{\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 - \cdots}{1 - y^2 + y^4 - y^6 + \cdots}$$

と近似されますから、分母・分子の第 1 項目だけを取って後を捨てて更に近似すれば $R \approx \frac{1}{3}y^3$ が得られます。従って $x \approx y + \frac{1}{3}y^3$ です。

次に $x = y + \frac{1}{3}y^3 + R$ としてこれを最初の式に代入すれば

$$y = \left(y + \frac{1}{3}y^3 + R\right) - \frac{1}{3}\left(y + \frac{1}{3}y^3 + R\right)^3 + \frac{1}{5}\left(y + \frac{1}{3}y^3 + R\right)^5 - \cdots$$

$$\begin{aligned} &\approx y + \frac{1}{3}y^3 + R - \frac{1}{3}\left\{\left(y + \frac{1}{3}y^3\right)^3 + 3\left(y + \frac{1}{3}y^3\right)^2 R\right\} \\ &\quad + \frac{1}{5}\left\{\left(y + \frac{1}{3}y^3\right)^5 + 5\left(y + \frac{1}{3}y^3\right)^4 R\right\} - \cdots \end{aligned}$$

$$0 \approx (1 - y^2 + \cdots)R + \left(-\frac{2}{15}y^5 + \cdots\right)$$

ですから同様に分子・分母で最初の項だけをとって近似すれば $R \approx \frac{2}{15}y^5$ が得られます。

以上から最初の 3 項は $\tan x \approx x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$ であることが分かりました。□

発展演習 6 任意の実数 a に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ であることを証明して下さい。

$a > 0$ の場合に証明すれば十分ですのでそう仮定します。 $2a < N$ であるような正の整数 N がありますから 1 つとって固定しておきます。すると $N < n$ であれば

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a^N a^{n-N}}{N!(N+1)(N+2)\cdots n} \\ &= \frac{a^N}{N!} \frac{a}{N+1} \frac{a}{N+2} \cdots \frac{a}{n} \\ &\leq \frac{a^N}{N!} \frac{a}{2a} \frac{a}{2a} \cdots \frac{a}{2a} \\ &= \frac{a^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \end{aligned}$$

と評価され、最後の項は $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束しますから題意が証明されました。□