

1 関数をべき級数で表すこと

<p>■今日の講義内容</p> <p>関数をべき級数展開する初等的な方法の紹介</p> <p>係数比較法</p> <p>等比級数の和を元にした変形</p> <p>ニュートンの逆関数の展開法</p> <p>部分積分</p> <p>べき級数を利用した近似値の計算</p>
<p>■講義中にやらなければならない事</p> <p>基本演習 2</p>
<p>■講義終了後次回までにやらなければならない事</p> <p>今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。</p> <p>基本演習 1, 3</p>

Exercise

基本演習 1 等比級数の和の公式 (1.1)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

を自乗して $\frac{1}{(1-x)^2}$ のべき級数展開式を 3 次の項まで求めて下さい。

基本演習 2 (1) $\sqrt{1+x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ と置いてこれの自乗の展開式を左右辺で係数比較して a_0, a_1, a_2, \dots を求め、 $\sqrt{1+x}$ のべき級数展開を（少なくとも x^4 の項まで）求めて下さい。

(2) べき級数を 3 次の項まで打ち切って次のように近似することを考えます：

$$\sqrt{1+x} \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

(2-a) $x = 1$ として $\sqrt{2}$ の近似値を求めてください。

(2-b) $x = -\frac{1}{2}$ とすることを使って、 $\sqrt{2}$ の近似値を求めてください。その結果は

(2-a) の結果と比べてどうでしょうか。

(2-c) $\sqrt{3}$ の近似値を、できるだけ上手く計算してください。

基本演習 3 今日やった部分積分を繰り返す方法で e^x のべき級数表現を求めて下さい。

発展演習 4 Tangent の加法公式を使って Machin の式：

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

を証明して下さい。

発展演習 5 今日見た Isaac Newton による逆関数のべき級数展開を求める方法を使って (1.4) 式：

$$\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

から $\tan x$ のべき級数展開を求めて下さい（最初の 3 項程度で良いです）。

発展演習 6 任意の実数 a に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ であることを証明して下さい。