

2 正項級数の収束／発散判定

2.1 あまりにもいい加減な計算に対する警鐘

前は細かいことは気にせず勢いで計算しましたが、当然問題があります。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (2.1)$$

例えば最初の等比級数の和の式 (2.1) において両辺 $x = -1$ とすると

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

ですが、これは微妙ですよ。実は有限和の段階では

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

であり、 $|r| < 1$ であるときに限り $n \rightarrow +\infty$ の極限が存在して

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1 - r} \quad (|r| < 1)$$

となったのです。今までこの条件 $|r| < 1$ をきちんと考えずにいたわけです。従って、上で考えた様な『両辺 $x = -1$ とする』ことは出来ないわけです。

$x = -1$ とするのがダメなことは了解しましたが、だったら前回は

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots \quad (2.2)$$

で両辺 $x = 1$ としましたがこれもダメなのではないでしょうか。だって (2.2) は $|x| < 1$ でしか成り立たない等比級数の和の公式を出発点として得られたものだったわけですから当然 $x = 1$ で成り立つことは今のところ保証されていません（証明はできますが、難しい数学になります）。

同じように、(2.1) において x を $-x$ で置き換えてから両辺を積分する事によって

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \\ \log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots \end{aligned}$$

となる事は認めるとしても、ここで直ちに $x = 1$ とする事は出来ません。しかしきちんと計算すればこの式は $x = 1$ でも成り立っていることが分かり

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

が得られます（区分求積法の考え方を利用する方法もあります）。

しかしこの級数の足す順番を微妙に入れ替えると、奇妙な事に

$$\begin{aligned} &\left(1\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7}\right) - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{16} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

となってしまいます。つまり、足す順番を変えると総和が変わってしまうのです。更に入れ替え方を工夫すれば合計をどんな値にでも出来ることが知られていますから、扱う上では（特に収束するのかもしれないかと云う点について）細心の注意が必要になります。

2.2 無限級数の和の定義

定義 2.1 実数とプラス記号を形式的に交互に無限個並べたもの：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots$$

を（無限）級数（infinite series）と言い、その第 n 項までを実際に足した値：

$$S_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$$

を部分和と言います。部分和の成す数列 $\{S_n\}_n$ が有限値 S に収束しているとき、級数 $\sum p_n$ は収束し、その和は S であると言って象徴的に次のように書きます：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots = S.$$

部分和が収束しない場合のうち、特に $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ の時はこの級数は $+\infty$ に発散すると言い、これも象徴的に

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots = +\infty.$$

と書きます（ $-\infty$ の場合も同様）。

2.3 調和級数

もしも級数 $\sum p_n$ が収束するなら、その和を S とすれば、

$$p_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

となるはずで、収束する級数の項はどんどん小さくなって行かねばなりません。逆に言えば（論理的には対偶）、ある限度以上小さくならないものを無限に足すと発散してしまいます。だからまず項 p_n を見て、 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \neq 0$ であればその級数は収束しません。

事実 2.2 級数 $\sum p_n$ が収束するならば $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ です。

ではその逆は成り立つでしょうか。例として調和級数

$$H_\infty : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

を考えてみましょう。この級数は $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ を満たしていますが、収束するでしょうか発散するでしょうか？

感じを掴むために有限部分和を $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ として計算してみました。

$$H_{100} = 5.18738 \dots \quad H_{10000} = 9.78761 \dots \quad H_{1000000} = 14.3927 \dots$$

$$H_{1000} = 7.48547 \dots \quad H_{100000} = 12.0901 \dots \quad H_{10000000} = 16.6953 \dots$$

さてこれを見てどう思いますか？ 確かにだんだん大きくはなって行きますが1千万項まで足してまだ17程度ですからね。収束する様な気がしますが以下の計算（N.Oresme, 1350 頃）を見てみると、

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &> 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned}$$

であって、この最後の級数は明らかに発散します。するとそれよりも大きな級数である調和級数も発散することになります。発散ですか、驚きです。

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ であるからと云って必ずしも和 $\sum p_n$ が収束するわけではない。

発散ということはいつか100を超えるのですが、詳しく調べると1個足すのに 10^{-9} 秒しか掛からないと仮定しても100を超えるまで計算しようと思ったら 3.5×10^{26} 年掛かることが判明してしまいます。

2.4 比較判定法 ～d'Alembert のアイデア～

負の数を含む無限和では足す順番に関してデリケートな問題が発生しますので、先ずは全ての項が正である正項級数について見て行くことにしましょう。正項級数では有限部分和の成す数列は単調増加ですからこれは収束するか $+\infty$ に発散するかどちらかしがありませんし、実は足す順番にも無関係であることが分かっています。

先に見た Oresme による調和級数発散の証明には注目すべきことがもう1つあります。発散を示した最後の議論に注目して下さい。『 $+\infty$ に発散することが分かっている別の級数と比較する』ことによって級数の発散を証明していますね。

単純化して言うと、正項級数 $\sum w_n$ が $+\infty$ に発散することが分かっている、かつ $w_n \leq p_n$ が成り立つならば、級数 $\sum p_n$ は『 $+\infty$ に発散する級数より大きい』のだからこれも $+\infty$ に発散すると言えるでしょう。同様に『収束する級数より小さければ収束する』とも言えます。まとめると次のようになります：

事実 2.3 2つの正項級数 $\sum v_n, \sum w_n$ があって十分大きな n に対して $v_n \leq w_n$ が成り立っているとき、

- (i) $\sum w_n$ が収束するならば $\sum v_n$ も収束し、
- (ii) $\sum v_n$ が $+\infty$ に発散するならば $\sum w_n$ も $+\infty$ に発散します。

『十分大きな n に対して』しか不等号が成り立っていませんが、級数の収束／発散に関しては級数の最初の方の項は全く関係がなく、大切なのは後の方がどうなっているかだけですからこれで問題ありません。

要するに既知の級数と比較して未知の級数を判断すると云うことですが、収束／発散がきちんと分かっている既知の級数と言っても今のところ等比級数ぐらいしかありません。

ん（等差級数は発散してしまいます）。従って必然的に等比級数と比較すると云う話になって行きます。

18 世紀の数学者 Jean Le Rond d'Alembert は、もし $\sum p_n$ が等比級数なら隣接項の比： $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ は公比になるはずだからこの比が 1 より小さいか見てやることによって収束判定が出来るだろうと考えました。

実際、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ であれば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} < R < 1$ であるような R を取ることが出来る（1 と $\lim$ の中点で良いでしょう）、十分大きな n に対しては

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} < R$$

となっていますから、十分大きな N を固定しておいて N 番目以降の p_n に関しては

$$p_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \cdots \frac{p_{N+1}}{p_N} \cdot p_N < R^{n-N} p_N = (R^{-N} p_N) R^n$$

と評価することが出来ます。この右辺の項をもつ級数 $\sum (R^{-N} p_N) R^n$ は収束する等比級数ですから結局元の級数 $\sum p_n$ も収束することが分かるという寸法です。

定理 2.4 [d'Alembert's ratio test] $\sum p_n$: 正項級数とします。

(i) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$ が有限値として存在するとき（その値を L として）、

(ia) $0 \leq L < 1$ ならば $\sum p_n$ は収束し、

(ib) $1 < L < \infty$ ならば $\sum p_n$ は $+\infty$ に発散します。

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \infty$ であるときは $\sum p_n$ は $+\infty$ に発散します。

2.4.1 具体的な判定例

(1) $\sum \frac{1}{n!}$: 第 n 項を $p_n = \frac{1}{n!}$ としますと隣接項の比は

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

ですから d'Alembert の判定法によりこの級数は収束します。

(2) $\sum \frac{2^n}{n^2}$: 第 n 項を $p_n = \frac{2^n}{n^2}$ としますと隣接項の比は

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \rightarrow 2 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

ですから d'Alembert の判定法によりこの級数は $+\infty$ に発散します。

(3) 調和級数 $H_\infty : \sum \frac{1}{n}$ は発散することを既に見ましたが、 $p_n = \frac{1}{n}$ とすると、

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

となってしまう d'Alembert の判定法では判定不可能です。

(4) $\sum \frac{1}{n^2}$: 第 n 項を $p_n = \frac{1}{n^2}$ としますと隣接項の比は

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 \rightarrow 1 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

ですからこれも d'Alembert の判定法では判定出来ません。

この様に隣接項の比の極限が 1 の場合は収束することもしないこともあり、d'Alembert の方法では判定することが出来ません。しかし彼の方法を改良した他の判定法が幾つか知られていて、そう云ったものを使うと判定出来るようになる場合があります。

基本演習 1 次の正項級数の収束・発散を d'Alembert の判定法によって判定してください。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Exercise

基本演習 1 次の正項級数の収束・発散を d'Alembert の判定法によって判定してください。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

基本演習 2 次の級数は収束するでしょうか？ 判定して下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} n^p a^n \quad (0 < a < 1)$$

基本演習 3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \log 2$$

であることを、区区分求積法によって示してください。

発展演習 4 (1) $\sum \frac{1}{n^2}$ が収束することを $y = \frac{1}{x^2}$ のグラフを利用して証明して下さい。

(2) 一般に $p > 1$ のとき $\sum \frac{1}{n^p}$ が収束することを同様に示してください。

発展演習 5 定理 2.4 の (ii) を証明して下さい。