

2 正項級数の収束／発散判定

Exercise 解答例

基本演習 1 次の正項級数の収束・発散を d'Alembert の判定法によって判定してください。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(1) この級数の第 n 項を p_n で表すことにすると、隣接項の比は

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}} = \frac{(n+1)^{100} 2^n}{n^{100} 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{100} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

となっていますので d'Alembert の判定法によりこの級数は収束します。

(2) この級数の第 n 項を p_n で表すことにすると、隣接項の比は

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{n+1}{3} \rightarrow \infty$$

となっていますので d'Alembert の判定法によりこの級数は $+\infty$ に発散します。

(3) これは明らかに $+\infty$ に発散する級数ですが、試しにやってみましょう。隣接比は

$$\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$$

ですね。と云う事は、d'Alembert の判定法では判定出来ないんですね。何だかな。

(4) 隣接項の比を計算してみると

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 \rightarrow 1$$

ですからこれも d'Alembert の判定法では判定出来ません。

□

基本演習 2 次の級数は収束するでしょうか？ 判定して下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} n^p a^n \quad (0 < a < 1)$$

(1)

$$\begin{aligned} R &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}^{-1} \end{aligned}$$

であり、Napier 数の定義：

$$\left(1 + \frac{1}{N} \right)^N \rightarrow e \approx 2.7 \quad (N \rightarrow \pm\infty)$$

によれば、 $R \rightarrow e^{-1} < 1$ ですから、d'Alembert の判定法により、この級数は収束します。

(2) 十分大きな n に対しては

$$\log n \leq n$$

であり、

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\log n}$$

が成り立っており、調和級数が $+\infty$ に発散したことから、問題の級数も発散します。

(3)

$$\frac{(n+1)^p a^{n+1}}{n^p a^n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p a \rightarrow a < 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ですから、d'Alembert の判定法によりこの級数は収束します。

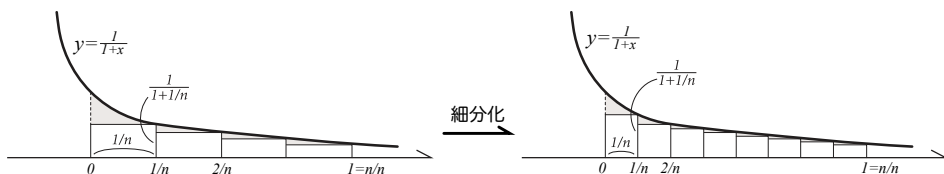
□

基本演習 3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \log 2$$

であることを、区分別積法によって示してください。

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2 \end{aligned}$$

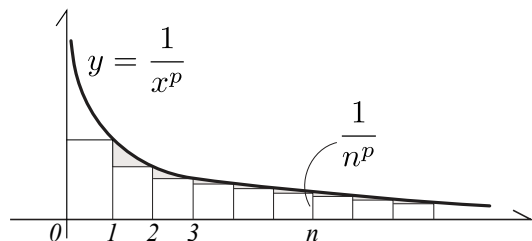


□

発展演習 4 (1) $\sum \frac{1}{n^2}$ が収束することを $y = \frac{1}{x^2}$ のグラフを利用して証明して下さい。

(2) 一般に $p > 1$ のとき $\sum \frac{1}{n^p}$ が収束することを同様に示してください。

(1)(2)



図のように

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} &< 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \\ &< 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \\ &= 1 + \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^\infty = 1 + \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

であり、部分和の作る数列は有界かつ単調増加ですから収束します。

ちなみに $p = 2$ のときの和は $\frac{\pi^2}{6}$ です。一体どうやって証明するのでしょうか・・・

発展演習 5 定理 2.4 の (ii) を証明して下さい。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = +\infty$ であると仮定します。すると十分大きな N をとれば、 $N \leq n$ については

$$2 < \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

が成り立っています。そこで十分大きな N を固定しておいて、 N 番目以降の p_n について見ると、

$$p_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \cdots \frac{p_{N+1}}{p_N} \cdot p_N > 2^{n-N} p_N = 2^{-N} p_N \cdot 2^n$$

が成り立っていますが、右辺の項を一般項にもつ級数は等比級数であり、その公比 2 が 1 より大きいことからその級数は $+\infty$ に発散しています。

従ってその級数よりも大きな級数である $\sum p_n$ も $+\infty$ に発散することが分かります。

□