

2 正項級数の収束／発散判定

■今日の講義内容
負の項を含む場合の注意
調和級数
d'Alembert の比較判定法
■講義中にやらなければならない事
基本演習 1
■講義終了後次回までにやらなければならない事
今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。
基本演習 2、発展演習 4(1)

重要事項

定義 2.1 実数とプラス記号を形式的に交互に無限個並べたもの：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots$$

を（無限）級数（infinite series）と言い、その第 n 項までを実際に足した値：

$$S_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$$

を部分和と言います。部分和の成す数列 $\{S_n\}_n$ が有限値 S に収束しているとき、級数 $\sum p_n$ は収束し、その和は S であると言って象徴的に次のように書きます：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots = S.$$

部分和が収束しない場合のうち、特に $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ の時はこの級数は $+\infty$ に発散すると言い、これも象徴的に

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots = +\infty.$$

と書きます（ $-\infty$ の場合も同様）。

事実 2.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} = +\infty & p \leq 1 \\ < +\infty & p > 1 \end{cases}$$

事実 2.3 2つの正項級数 $\sum v_n, \sum w_n$ があって十分大きな n に対して $v_n \leq w_n$ が成り立っているとき、

- (i) $\sum w_n$ が収束するならば $\sum v_n$ も収束し、
- (ii) $\sum v_n$ が $+\infty$ に発散するならば $\sum w_n$ も $+\infty$ に発散します。

定理 2.4 [d'Alembert's ratio test] $\sum p_n$ ：正項級数とします。

- (i) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$ が有限値として存在するとき（その値を L として）、
 - (ia) $0 \leq L < 1$ ならば $\sum p_n$ は収束し、
 - (ib) $1 < L < \infty$ ならば $\sum p_n$ は $+\infty$ に発散します。
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \infty$ であるときは $\sum p_n$ は $+\infty$ に発散します。

Exercise

基本演習 1 次の正項級数の収束・発散を d'Alembert の判定法によって判定してください。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

基本演習 2 次の級数は収束するでしょうか？ 判定して下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} n^p a^n \quad (0 < a < 1)$$

基本演習 3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \log 2$$

であることを、区区分求積法によって示してください。

発展演習 4 (1) $\sum \frac{1}{n^2}$ が収束することを $y = \frac{1}{x^2}$ のグラフを利用して証明して下さい。

(2) 一般に $p > 1$ のとき $\sum \frac{1}{n^p}$ が収束することを同様に示してください。

発展演習 5 次の (ii) を証明して下さい：

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \infty$ であるときは正項級数 $\sum p_n$ は $+\infty$ に発散します。