3　べき級数の収束半径

3.1　べき級数の収束判定へ向けて

本題に戻ってべき級数について考えます。

x のべき級数とは、x のべき乗の形式的な実数係数の無限和ですが、この x のところに特定の実数を代入して得られる式は通常の形式的な級数となりますから、それが収束するかしないかが問題になります。

例えば次のべき級数について見てみましょう：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2 2}x^2 + \frac{1}{2^3 3}x^3 + \cdots .$$

まず $x = 0$ で収束することは自明です。

次に $x = 1$ について見てみると、具体値を代入した級数は $\sum \frac{1}{2^n n}$ です。これは正項級数であり、隣接項の比は

$$\frac{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{1}{2^n n}} = \frac{n}{2(n+1)} \to \frac{1}{2} \quad (\text{as } n \to \infty)$$

となりますから d'Alembert の判定法によればこれは収束しています。

では $x = 2$ ではどうでしょうか？　残念ながらこの場合代入して得られる級数は調和級数ですから、既に見たようにこれは $+\infty$ に発散します。

この様に、x のべき級数については、『x にどんな値を代入した時に収束するか』と云う問題が発生し、$x = b > 0$ とすると隣接項の比は

$$\frac{\frac{b^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{b^n}{2^n n}} = \frac{bn}{2(n+1)} \to \frac{b}{2} \quad (\text{as } n \to \infty)$$

となりますから、d'Alembert の判定法により、$0 < b < 2$ であれば収束であり、$2 < b$ であれば $+\infty$ に発散であることが分かります。

では $x < 0$ の時はどうでしょうか？　例えば $x = -1$ の場合級数は $\sum \frac{1}{(-2)^n n}$ になりますが、これは正項級数ではありませんから d'Alembert の判定法を適用することは出来ません。

また一般には係数が最初から負である事も想定されるわけですが、そう云った場合には $x > 0$ の場合ですら d'Alembert の判定法を適用することが出来ません。この壁はどうやって突破したら良いのでしょうか。

3.2　絶対値をとってみる

正項級数でない級数 $\sum p_n$ があったとき、負である項は無限個あるはずです（有限個しか無いのなら、最後の負の項までの有限和にそれ以降の正項級数を加えたものであって、その級数は本質的には正項級数だと言えます）。

負の項も含む元の級数 $\sum p_n$ において各項 p_n を $|p_n|$ に置き換えた級数 $\sum |p_n|$ は正項級数になりますが、仮にこれが収束して和が $\sum |p_n| = S$ であるとすると、その一部である p_n が負であるような n のみに関する $|p_n|$ の和も収束しているはずですからこちらの和を

$$\sum_{\substack{p_n\text{が負} \\ \text{である } n \text{ のみ}}} |p_n| = T$$

としておきましょう。すると、

$$\sum_{n=0}^{m} p_n = \sum_{m\text{ まで全部}} |p_n| - 2 \sum_{\substack{p_n\text{が負である} \\ n \le m\text{ のみ}}} |p_n|$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} p_n = S - 2T$$

となって元の級数も収束していることが分かります。つまり、

$$\boxed{\sum |p_n| \text{ が収束} \quad \Longrightarrow \quad \sum p_n \text{ も収束}}$$

が言えるのです。従ってまずは絶対値を取って d'Alembert の判定法でやってみようと云うことになるわけです（ただし、$\sum |p_n|$ が収束しない場合には $\sum p_n$ に関しては残念ながら何も言えません）。

これでようやく $x = -1$ のときに戻れますね。さっきべき級数 $\sum \frac{1}{2^n n} x^n$ の収束する範囲を見ていて、$0 \le x < 2$ なら収束することは既に分かりました。

$x = -1$ とするとこの級数は $\sum \frac{1}{(-2)^n n}$ でしたが、この各項の絶対値を取れば $\sum \frac{1}{2^n n}$ となってこれは d'Alembert の判定法から収束しています。すると今見た事実から実は $x = -1$ でも収束していることが分かってしまいます。

全く同様に絶対値を取って調査すれば $-2 < x < 2$ で収束していることが分かります。

結論：　べき級数 $\sum \frac{1}{2^n n} x^n$ は $-2 < x < 2$ の範囲で収束します。

3.3　絶対収束

定義 3.1 x のべき級数 $\sum a_n x^n$ に具体的な値 $x = b$ を代入して得られる級数 $\sum a_n b^n$ が収束するとき、『べき級数 $\sum a_n x^n$ は $x = b$ において収束する』と言います。

級数 $\sum a_n b^n$ は一般に正項級数とは限りませんが、$a_n \neq 0$ であれば級数の各項をその絶対値を取ったもので置き換えて得られる級数：

$$\sum |a_n||b|^n \tag{3.1}$$

は明らかに正項級数であって、正項級数の収束なら有力な判定法が知られていますし、さっき見たようにもしこれが収束しているならば元の級数自体が普通の意味で収束していることも分かってしまいます。だから直接 $\sum a_n b^n$ の収束が判定出来ないと言って悩むよりも各項の絶対値を取った上で（3.1）の収束を判定する方が建設的です。

そこで次の様に定義することにします：

定義 3.2 x のべき級数 $\sum a_n x^n$ において具体的な値 $x = b$ を代入したうえで各項ごとに絶対値をとって得られる級数 $\sum |a_n||b|^n$ が収束するとき、べき級数 $\sum a_n x^n$ は $x = b$ において絶対収束すると言います。

もちろん犠牲はあります。収束するのに絶対収束しない級数があるからです（条件収束していると言います)。例えば

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

は収束していますが、この級数の各項を絶対値を取ったもので置き換えた級数：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

は調和級数であって $+\infty$ に発散してしまいます。

このように、べき級数 $\sum a_n x^n$ が $x = b$ で収束していても $x = b$ で絶対収束しているとは言えませんが、実は少し小さい所での絶対収束なら言えてしまいます。

仮にべき級数 $\sum a_n x^n$ が $x = b$ で収束しているとしましょう。前に見たようにこのとき $\lim_{n\to\infty} a_n b^n = 0$ ですから、特に、n を十分大きくとれば $|a_n b^n| < 1$ となっているはずです。

このとき n を十分大きくとれば、$|c| < |b|$ であるような任意の c に対して、

$$|a_n c^n| = |a_n| \left|\frac{c}{b}\right|^n |b|^n \leq \left|\frac{c}{b}\right|^n$$

が成り立っており、右辺を一般項とする級数は公比が 1 より小さい等比級数でありこれは明らかに収束します。従ってその収束する級数よりも小さな $\sum |a_n c^n|$ も収束する事が分かります。これはべき級数 $\sum a_n x^n$ が $x = c$ で絶対収束する事を意味します。

定理 3.3 一般に x のべき級数において、

$$『x = b \text{ で絶対収束}』 \Longrightarrow 『x = b \text{ で収束}』$$

は成り立ちますが、逆は成り立ちません。しかし、

$$『|c| < |b| \text{ であるような } x = c \text{ で絶対収束}』 \Longleftarrow 『x = b \text{ で収束}』$$

は成り立ちます。

この２つの結果を合わせれば、

$$『x = b \text{ で絶対収束}』 \Longrightarrow 『x = b \text{ で収束}』 \Longrightarrow 『|c| < |b| \text{ であるような } x = c \text{ で絶対収束}』$$

となることに注意します。つまり、

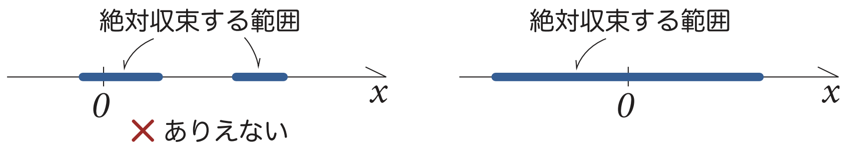
$$『x = b \text{ で絶対収束}』 \Longrightarrow 『|x| < |b| \text{ で絶対収束}』$$

です。

3.4　収束半径

このように、べき級数が絶対収束するか否かを調べると、下図左のように飛び飛びの x の値で絶対収束するような事はなく、下図右のように原点中心の左右対称な領域（区間）があって、その内側では絶対収束、外側では絶対収束しないと云う風になっている

事が分かります。



この絶対収束する／しないの境界値の事を『収束半径』と呼んでいます。

> **定義 3.4** x のべき級数 $\sum a_n x^n$ は（十分大きな n について）$a_n \neq 0$ であるとします。このとき x に具体値を入れて得られる級数の収束について
>
> (1)　任意の x に対して絶対収束する。
> (2)　ある $0 < R < \infty$ が存在して
> 　　$|x| < R$ で絶対収束し、$|x| > R$ では収束しない。
> (3)　$x = 0$ でのみ絶対収束し、他では収束しない。
>
> の何れかの場合が成立します。
>
> 　そこで (1) の場合は ∞、(2) の場合は存在する R、(3) の場合は 0 をこのべき級数の収束半径と言います。

ただし、$x = \pm R$ での絶対収束／発散は不明です。

3.4.1　収束半径の計算方法

x のべき級数 $\sum a_n x^n$ に具体的な値 $x = b$ を代入して得られる級数 $\sum a_n b^n$ が絶対収束するかどうか、つまり級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||b|^n \quad \left(= \sum_{n=0}^{\infty} p_n\right)$$

が収束するかどうかを d'Alembert の判定法で見て行きましょう。

隣接項の比は：

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{|a_{n+1}||b|^{n+1}}{|a_n||b|^n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |b|$$

ですから判定法を使うためには極限値 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ が存在してもらう必要があります（∞ に発散する場合も含めておきます）。このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = L|b|$$

ですから、d'Alembert の判定法に依れば

$$0 \leq L|b| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{収束}, \qquad 1 < L|b| \leq \infty \quad \Rightarrow \quad \text{発散}$$

です。これを b についての条件として整理すると

L	$\sum \vert a_n\vert\vert b\vert^n$ の収束／発散
$L = 0$	任意の b で収束
$0 < L < \infty$	$\vert b\vert < \frac{1}{L}$ で収束し $\frac{1}{L} < \vert b\vert$ で発散
$L = \infty$	$b = 0$ のみ収束し、$b \neq 0$ で発散

となります。$L = 0$ のときは $\frac{1}{L} = \infty$ と解釈し、$L = \infty$ のときは $\frac{1}{L} = 0$ と解釈すれば、これは b が 0 を中心とする半径 $\frac{1}{L}$ の範囲内にありさえすれば級数は絶対収束し、その外部では発散すると云うことを示しています。

従ってこの $\frac{1}{L}$ すなわち

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

こそがべき級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径に他なりません（従って、等比級数の収束半径は公比の逆数です）。

> **事実 3.5** x のべき級数 $\sum a_n x^n$ は（十分大きな n について）$a_n \neq 0$ であるとします。このとき極限値
>
> $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$
>
> が有限値として、あるいは $+\infty$ に発散の意味で存在する時、その値が収束半径に他なりません。

3.5 具体的な収束半径の計算例

3.5.1 ［教科書例題 3.1(1)］$\sum x^n$

x^n の係数を a_n とすると $a_n = 1$ ですから明らかに $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$、収束半径は 1 です。これは等比級数の和であり、$|x| < 1$ で収束していたと云う事実と一致しています。

3.5.2 ［教科書例題 3.1(2)］$\sum \frac{1}{n!}x^n$

x^n の係数を a_n と書けば $a_n = \frac{1}{n!}$ ですから、

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = n+1 \to \infty \quad \text{as } n \to \infty$$

となって収束半径は ∞、即ち任意の x に対して絶対収束しています。

3.5.3 係数に０を含むべき級数の場合

これは絶対値をとっても厳密には“正項”級数にならないため、一般には色々難しい点が多いですが、偶数番目、あるいは奇数番目だけが全て０であるような場合には巧い方法があります。例えば級数 $\sum \frac{1}{(2n+1)2^n}x^{2n+1}$ の場合、x でくくると

$$\begin{aligned} &x + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{5\cdot 2^2}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)2^n}x^{2n+1} + \cdots \\ &= x\left(1 + \frac{1}{3\cdot 2}x^2 + \frac{1}{5\cdot 2^2}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)2^n}x^{2n} + \cdots\right) \end{aligned}$$

なので、括弧内が収束する範囲を考えれば良いことになります。これは $x^2 = y$ と置いて

$$1 + \frac{1}{3\cdot 2}y + \frac{1}{5\cdot 2^2}y^2 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)2^n}y^n + \cdots$$

の収束半径を y のべき級数として求めてやってあとで x に変換する方向で考えましょう。
y のべき級数としての n 次の項の係数を a_n と書けば

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(2n+3)2^{n+1}}{(2n+1)2^n} = \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}\cdot 2 \to 2$$

ですから、y の級数として収束半径は 2 です。従って x の級数としての収束半径は $\sqrt{2}$ であることが分かります。

Exercise

基本演習 1［ 教科書問題 3.1 ］ 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

基本演習 2［ 問題集 3.1 ］ 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1)x^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

発展演習 3［ 問題集 3.2 ］ 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

(1) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$

(2) $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

(3) $x + \dfrac{2!}{3}x^2 + \dfrac{3!}{5}x^3 + \cdots + \dfrac{n!}{2n-1}x^n + \cdots$

発展演習 4 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{2n}$

(3) $\displaystyle\sum (-1)^{n-1}\frac{x^n}{\log(n+1)}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

ただし、$n!!$ は１個飛ばしの階乗で、便宜上 $0!! = (-1)!! = 1$ と定義します。