3 べき級数の収束半径

Exercise 解答例

基本演習 1 [教科書問題 3.1] 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(1) n 次の係数は $a_n = n!$ ですから、

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

となって収束半径は 0、即ち任意の $x = 0$ のときのみ絶対収束しています。

(2) n 次の係数は $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ですから、

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$$

より収束半径は 1 です。 $x = 1$ では

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \log 2$$

であり、既に見たように絶対収束はしていませんが収束しています。

(3) 係数列は 0 番目から始めて奇数番目は 0 になってしまいますね。こう云った場合はどう考えたら良いのでしょうか？こう云う場合は先ず級数を書き下してみて

$$1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots$$

ここで $x^2 = y$ と置いて

$$1 - \frac{1}{2!} y + \frac{1}{4!} y^2 - \dots$$

y のべき級数と考えて収束半径を求めて後で x に変換します。この級数は $\sum a_n y^n$ とすると $a_n = (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$ ですから、

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = (2n+2)(2n+1) \rightarrow \infty$$

となり、 y のべき級数として収束半径は ∞ です。従って x で考えても収束半径は ∞ となりますから、任意の x で収束することが分かります。 $\square$

基本演習 2 [問題集 3.1] 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2} \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

それぞれの問題ごとに、級数の n 次の係数を a_n と書く事にします。

(1) n 次の係数は $a_n = \frac{1}{n}$ ですから、

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より収束半径は 1 です。

(2)

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となりますから収束半径は 1 です。

(3)

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

から収束半径は 1 です。

(4) $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = 2$ によれば収束半径は 2 です。

(5)

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{3^n n^2}}{\frac{1}{3^{n+1} (n+1)^2}} = 3 \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \rightarrow 3 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となりますから収束半径は3です。

(6)

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}} = (n+1) \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = (n+1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

となりますから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

に注意すれば、 $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \rightarrow \infty$ であって、収束半径は ∞ です (任意の実数で収束します)。

発展演習 3 [問題集 3.2] 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$(1) x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$(2) 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$(3) x + \frac{2!}{3}x^2 + \frac{3!}{5}x^3 + \cdots + \frac{n!}{2n-1}x^n + \cdots$$

(1)

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \cdots \right)$$

なので、括弧内が収束する範囲を考えれば良い。また、 $x^2 = y$ と置いて

$$1 + \frac{y}{3} + \frac{y^2}{5} + \cdots + \frac{y^n}{2n+1} + \cdots$$

の収束半径を y のべき級数として求めてやってあとで x に変換する方向で考えましょう。

y のべき級数としての n 次の項の係数を a_n と書けば

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{2n+3}{2n+1} = \frac{2 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

ですから、 y の級数として収束半径は1です。従って x の級数としても収束半径は1であることが分かります。

(2) $x^2 = y$ と置いて

$$1 + \frac{1}{2!}y + \frac{1}{4!}y^2 + \cdots$$

y のべき級数と考えて収束半径を求めて後で x に変換します。この級数は $\sum a_n y^n$ とすると $a_n = \frac{1}{(2n)!}$ ですから、

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = (2n+2)(2n+1) \rightarrow \infty$$

となり、 y のべき級数として収束半径は ∞ です。従って x で考えても収束半径は ∞ となります (任意の x で収束します)。

(3) n 次の係数を b_n と書けば、

$$\left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \frac{\frac{n!}{2n-1}}{\frac{(n+1)!}{2n+1}} = \frac{2n+1}{(n+1)(2n-1)} \rightarrow 0$$

が分かり、従って収束半径は0です。

発展演習 4 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n}$$

$$(3) \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\log(n+1)} \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ただし、 $n!!$ は1個飛ばしの階乗で、便宜上 $0!! = (-1)!! = 1$ と定義します。

(1) n 次の係数を w_n と書けば、

$$\left| \frac{w_n}{w_{n+1}} \right| = \frac{\frac{n^n}{n!}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}^{-1}$$

ですが、この最後の項は e^{-1} に収束しますから収束半径は e^{-1} です。

(2) $x^2 = y$ と置けばこの級数は $\sum n^2 y^n$ ですから、これを y の級数として収束半径を求めます。 n 次の係数を p_n と書けば、

$$\left| \frac{p_n}{p_{n+1}} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$$

ですから y の級数として収束半径は 1 であることが分かり、従って x の級数としても収束半径は 1 です。

(3) n 次の係数を w_n と書けば、

$$\left| \frac{w_n}{w_{n+1}} \right| = \frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}$$

であってこれは不定形です。そこで実数化した $\frac{\log(x+2)}{\log(x+1)}$ を考えて、分母・分子の微分の比を見ると、

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'} = \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{x+2} \rightarrow 1$$

ですからロピタルの定理から元の比の極限值も存在して 1 です。従って自然数で極限をとったものも同じ値 1 になります。以上から収束半径は 1 です。

(4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

なので、和記号の部分だけを考えて収束半径を見ます。また、 $x^2 = y$ と置けば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{y^n}{2n+1}$$

ですからこの n 次の係数を w_n と置いて y の級数としての収束半径から見て行きましょう。すると

$$\left| \frac{w_n}{w_{n+1}} \right| = \frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)}} = \frac{(2n-1)!!(2n+2)!!(2n+3)}{(2n)!!(2n+1)!!(2n+1)} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} \rightarrow 1$$

から y の級数としての収束半径は 1 であり、従って x の級数として考えても収束半径は 1 です。□