

3 べき級数の収束半径

■今日の講義内容
絶対収束 収束半径とその計算方法
■講義中にやらなければならない事
基本演習 1
■講義終了後次回までにやらなければならない事
今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。
基本演習 2

重要事項

$$\sum |p_n| \text{ が収束 } \implies \sum p_n \text{ も収束}$$

定義 3.1 x のべき級数 $\sum a_n x^n$ に具体的な値 $x = b$ を代入して得られる級数 $\sum a_n b^n$ が収束するとき、『べき級数 $\sum a_n x^n$ は $x = b$ において収束する』と言います。

定義 3.2 x のべき級数 $\sum a_n x^n$ において具体的な値 $x = b$ を代入したうえで各項別に絶対値をとって得られる級数 $\sum |a_n| |b|^n$ が収束するとき、べき級数 $\sum a_n x^n$ は $x = b$ において絶対収束すると言います。

定理 3.3 一般に x のべき級数において、

$$\text{『} x = b \text{ で絶対収束』} \implies \text{『} x = b \text{ で収束』}$$

は成り立ちますが、逆は成り立ちません。しかし、

$$\text{『} |c| < |b| \text{ であるような } x = c \text{ で絶対収束』} \longleftarrow \text{『} x = b \text{ で収束』}$$

は成り立ちます。

定義 3.4 x のべき級数 $\sum a_n x^n$ は（十分大きな n について） $a_n \neq 0$ であるとし、このとき x に具体値を入れて得られる級数の収束について

- (1) 任意の x に対して絶対収束する。
- (2) ある $0 < R < \infty$ が存在して
 $|x| < R$ で絶対収束し、 $|x| > R$ では収束しない。
- (3) $x = 0$ でのみ絶対収束し、他では収束しない。

の何れかの場合が成立します。

そこで (1) の場合は ∞ 、(2) の場合は存在する R 、(3) の場合は 0 をこのべき級数の収束半径と言います。

ただし、 $x = \pm R$ での絶対収束／発散は不明です。

事実 3.5 x のべき級数 $\sum a_n x^n$ は（十分大きな n について） $a_n \neq 0$ であるとし、このとき極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

が有限値として、あるいは $+\infty$ に発散の意味で存在する時、その値が収束半径に他なりません。

3.5 具体的な収束半径の計算例

3.5.1 [教科書例題 3.1(1)] $\sum x^n$

x^n の係数を a_n とすると $a_n = 1$ ですから明らかに $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$ 、収束半径は 1 です。
これは等比級数の和であり、 $|x| < 1$ で収束していたと云う事実と一致しています。

3.5.2 [教科書例題 3.1(2)] $\sum \frac{1}{n!} x^n$

x^n の係数を a_n と書けば $a_n = \frac{1}{n!}$ ですから、

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = n+1 \rightarrow \infty \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

となって収束半径は ∞ 、即ち任意の x に対して絶対収束しています。

3.5.3 係数に 0 を含むべき級数の場合

これは絶対値をとっても厳密には“正項”級数にならないため、一般には色々難しい点が多いですが、偶数番目、あるいは奇数番目だけが全て 0 であるような場合には巧い方法があります。例えば級数 $\sum \frac{1}{(2n+1)2^n} x^{2n+1}$ の場合、 x でくくると

$$\begin{aligned} & x + \frac{1}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{1}{5 \cdot 2^2} x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)2^n} x^{2n+1} + \cdots \\ &= x \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{5 \cdot 2^2} x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)2^n} x^{2n} + \cdots \right) \end{aligned}$$

なので、括弧内が収束する範囲を考えれば良いことになります。これは $x^2 = y$ と置いて

$$1 + \frac{1}{3 \cdot 2} y + \frac{1}{5 \cdot 2^2} y^2 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)2^n} y^n + \cdots$$

の収束半径を y のべき級数として求めてやってあとで x に変換する方向で考えましょう。

y のべき級数としての n 次の項の係数を a_n と書けば

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{(2n+3)2^{n+1}}{(2n+1)2^n} = \frac{2 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \cdot 2 \rightarrow 2$$

ですから、 y の級数として収束半径は 2 です。従って x の級数としての収束半径は $\sqrt{2}$ であることが分かります。

Exercise

基本演習 1 [教科書問題 3.1] 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

基本演習 2 [問題集 3.1] 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2} \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

発展演習 3 [問題集 3.2] 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$\begin{aligned} (1) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \\ (2) & 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ (3) & x + \frac{2!}{3} x^2 + \frac{3!}{5} x^3 + \cdots + \frac{n!}{2n-1} x^n + \cdots \end{aligned}$$

発展演習 4 次のべき級数の収束半径を求めて下さい。

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n} \\ (3) & \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\log(n+1)} \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

ただし、 $n!!$ は 1 個飛ばしの階乗で、便宜上 $0!! = (-1)!! = 1$ と定義します。