

4 Taylor 展開

4.1 べき級数の中心のシフト

等比級数の和の公式：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

を使って近似値を計算しようとする場合、この式は $|x| < 1$ の範囲でしか成り立っていないので、例えば $x = 10$ のような大きな値を代入するわけにはいきません。でも大きな x に関する近似値を計算したいことだってあるでしょう。

実はこれはちょっとした変形によって実現可能であることが分かります。

まずは x の所を強引に $x - 10$ に置き換えて下さい。すると当然元の式と整合しませんが帳尻合わせの -10 を書き加える必要があります：

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1 - \underbrace{(x-10)}_{\text{強引にこの形にする}} - \underbrace{-10}_{\text{帳尻合わせ}}} = \frac{1}{-9 - (x-10)}$$

すると分母の定数部分が -9 になってしまいますが、等比級数の和の公式を活用したい手前、ここは是非とも 1 になってほしいので分母全体を -9 でくくってしまいます：

$$= -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-10}{-9}} \quad \cdots \text{分母が『} 1 - (\text{なんとか}) \text{』の形になった！}$$

ここで分かり易くするために $\frac{x-10}{-9}$ の部分をまとめて r と書いてしましましょう：

$$= -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-r}$$

すると $|r| < 1$ であれば等比級数の和の公式から

$$= -\frac{1}{9}(1 + r + r^2 + \cdots)$$

と展開することが出来ます。これを元の x に戻せば

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{9} \left\{ 1 + \frac{x-10}{-9} + \left(\frac{x-10}{-9} \right)^2 + \cdots \right\} \\ &= -\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2}(x-10) - \frac{1}{9^3}(x-10)^2 + \cdots \end{aligned}$$

となって $x - 10$ をひとまとまりとしてべき級数に展開することが出来ました。

問題は肝心の成り立つ範囲なのですが、これは $|r| < 1$ すなわち $\left| \frac{x-10}{-9} \right| < 1$ でしたから整理すれば

$$|x - 10| < 9, \quad \text{すなわち} \quad 1 < x < 19$$

となっていて、ほら、 $x = 10$ のような大きな x でも成り立っていますよ。

この様に、大きな x でも使える級数展開は、べきの部分を x^n から例えば $(x - 10)^n$ に修正した形で作ることが出来るのです。こうすれば x の値が 10 に近ければ $x - 10$ の値が小さくなってきて級数が収束してくれるのです。

定義 4.1 x を変数とした形式的な定数係数の無限和：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

のことを $x - c$ のべき級数、あるいは $x = c$ のまわりのべき級数と言います。

今まで素朴にべき級数と呼んでいたものは $x = 0$ のまわりのべき級数と云うことになります。『 $\cdots$ のまわり』と云う指定が書かれていない場合は $x = 0$ のまわりを意味するものと解釈するのが通例です。

この様に中心がシフトしたべき級数の収束半径も前回と全く同様にして求めることが出来ます。 $x - c = y$ とでも置いてしまってもまずは y のべき級数として考えて収束半径 R を求めれば $|y| < R$ の範囲で絶対収束することが分かるのですから、これを x に戻してやれば $|x - c| < R$ の範囲で絶対収束していることが言えると云うわけです。

収束半径は、べき級数の中心からの半径である点に注意して下さい。

基本演習 1 関数 $\frac{1}{1-x}$ を $x = 5$ のまわりのべき級数で表し、更にその表現が成り立つ範囲も求めて下さい。

4.2 ベキ級数展開の係数と微分係数の関係

仮に関数 $f(x)$ が、 $x = a$ の近くで

$$f(x) = p_0 + p_1(x-a) + p_2(x-a)^2 + \cdots + p_n(x-a)^n + \cdots \quad (4.1)$$

とベキ級数展開出来ていたと仮定すると、両辺に $x = a$ を代入すれば $f(a) = p_0$ であることが分かります。

これを更に進めましょう。(4.1) 式の両辺を微分して：

$$f'(x) = p_1 + 2p_2(x-a) + 3p_3(x-a)^2 + \cdots \quad (4.2)$$

とした上で矢張り両辺 $x = a$ とすれば $f'(a) = p_1$ が分かりますし、さらに (4.2) を何度も微分すれば

$$f''(x) = 2p_2 + 3 \cdot 2p_3(x-a) + 4 \cdot 3p_4(x-a)^2 + \cdots$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2p_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2p_4(x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3p_5(x-a)^2 + \cdots$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = n!p_n + (n+1)n \cdots 2p_{n+1}(x-a) + (n+2)(n+1) \cdots 3p_{n+2}(x-a)^2 + \cdots$$

となりますから、各式において $x = a$ とすることによって

$$p_2 = \frac{1}{2}f''(a), p_3 = \frac{1}{3!}f^{(3)}(a), \dots, p_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$$

となっていなければならないことが分かります。

従って、

定義 4.2 関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで $x - a$ のベキ級数に展開されるならば、それは

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

の形でなければならないことが分かります。

いつも上のような展開式が成立するわけではありませんが、もし可能であるならばこの右辺のベキ級数を、 $x = a$ のまわりでの $f(x)$ の Taylor 級数あるいは Taylor 展開と言います。また、特に $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開のことを Maclaurin 展開とも言います。

4.3 Taylor 展開の例

問題 4.3 $\sqrt{x}$ が $x = 1$ で Taylor 展開可能であることは既知としてその展開式を求め、更にその収束半径も求めて下さい。

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ として何回か微分してみると、

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \quad f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) x^{\frac{1}{2}-2} \quad f^{(2)}(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) x^{\frac{1}{2}-3} \quad f^{(3)}(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right)$$

となっているので第 n 階の微分は

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right) x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

となっていると予想されます。実際この右辺を微分すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right) \left\{ x^{-\frac{2n-1}{2}} \right\}' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right) \left(\frac{1}{2} - n \right) x^{-\frac{2n-1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - \{n+1\} + 1 \right) x^{-\frac{2(n+1)-1}{2}} \end{aligned}$$

となっていますから確かに帰納法によってこのことは確かめられ、結局求める Taylor 展開式は

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1) \cdot (\frac{1}{2}-2)}{3!}(x-1)^3 + \cdots$$

となります。

また、展開の n 次の係数を a_n と書くと、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1) \cdot (\frac{1}{2}-2) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1) \cdot (\frac{1}{2}-2) \cdots (\frac{1}{2}-\{n+1\}+1)} \right| = \frac{n+1}{n-\frac{1}{2}} \rightarrow 1$$

ですから収束半径は 1 です。

基本演習 3 $f(x) = e^x$ の、 $x = 0$ での Taylor 級数を求めてください。ただし展開の可能性は既知とします。

4.4 Taylor 展開を使った近似値の計算

今見たように指数関数 $f(x) = e^x$ の $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開式は

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

となりますが、このべき級数の収束半径は ∞ でしたから、両辺で $x = 1$ とする事によって Napier 数 e の無限和表示：

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

が得られます。この無限和を全部足せば（まあ、人間には“全部足す”事なんか出来ませんがね）Napier 数になるわけですが、その無限和計算をどこか途中でストップすれば Napier 数の近似値を得る事が出来ます。

例えば 0 次、1 次、2 次、3 次のところで区切ってそれ以降は無視すると、

$$0 \text{ 次近似 } e \approx 1$$

$$1 \text{ 次近似 } e \approx 1 + 1 = 2$$

$$2 \text{ 次近似 } e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2.5$$

$$3 \text{ 次近似 } e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2.666 \dots$$

となっていますね。ちなみに Napier 数の正確な値は、

$$e = 2.718281828459045235360287471352 \dots$$

ですから、まあ、3 次くらいの近似になるとまずまずと云ったところでしょうか。更に高次の近似をすると、

$$4 \text{ 次近似 } e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2.70833 \dots$$

$$5 \text{ 次近似 } e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2.71666 \dots$$

となって更に良い近似が得られます。

4.5 近似値と誤差

しかしここに大きな問題があります。

今私たちは、3 次あるいは更に高次の近似を見て“まずまずの近似だな”、“良い近似だな”と思いましたが、それはなぜそう思ったかと言うと、Napier 数の正しい値を知っているからですね。それを知らなければこれらの近似が果たしてどの程度の近似なのかは全く分からないはずです。

しかしよくよく考えてみると、某かの近似値を計算しようとしていると云う事は、その近似される対象の値が分からないからこそ近似値で代用しようとするわけです。

逆に言えば、『その値』が分かっているのなら、わざわざ近似値を使う必要がありません。

つまり今やったような無限和を有限のところで切って後は無視すると云う類いのやり方では確かに近似値は得られますがその近似値がどれくらいの精度であるかが分かりません。誤差がどの程度か分からないと言い換えても良いでしょう。

この様に誤差が分からない場合、その近似値は実用的ではありません。なぜならその近似値を使って計算した結果にどの程度の信頼性があるのか何の情報も得られないからです。

山の両側からトンネルを掘って行くとき、どこかで交わらなければなりません、掘り初めの 1 センチの誤差でも 10 キロ掘り進めば何メートルもの大きなずれになってしまいます。だから実務上では『10 キロ掘り進んだ時のずれを 1 センチ以内に押さえたからそのためには掘り初めの近似値はどの程度の精度で計算しなければならないか』などと云う事が問題となるわけです。

今回は近似値の誤差をどうやって評価したら良いのかを考える事にしましょう。まあ、今日のところは誤差の事は考えずに近似値が得られると云うことだけで一応満足しておきます。

Exercise

基本演習 1 関数 $\frac{1}{1-x}$ を $x = 5$ のまわりのべき級数で表し、更にその表現が成り立つ範囲も求めて下さい。

発展演習 2 関数 $\frac{x}{1-x}$ を $x = 3$ のべき級数で表し、更にその表現が成り立つ範囲も求めて下さい。

基本演習 3 $f(x) = e^x$ の、 $x = 0$ での Taylor 級数を求めてください。ただし展開の可能性は既知とします。

基本演習 4 次の関数を指定された点の近くで Taylor 展開して下さい。ただし、展開は可能であると仮定したうえで展開式を求め、その収束半径も求めて下さい。

- (1) e^x 、 $x = 1$ の近くで。
- (2) $\cos x$ 、 $x = 0$ で。
- (3) $\sin x$ 、 $x = 0$ の近くで。
- (4) $\log(1+x)$ 、 $x = 0$ のまわりで。
- (5) $\sin x$ 、 $x = \frac{\pi}{3}$ の近くで。
- (6) $\cos x$ 、 $x = \frac{\pi}{6}$ の周りで。

基本演習 5 $\sin x$ の Taylor 展開を $x = 0$ の近くで 4 次の項まで求め、5 次以降は無視する事によって $\sin 1^\circ$ の近似値を求めて下さい。

参考値： $\frac{\pi}{180} = 0.017453$, $\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 = 0.0000053165$

基本演習 6 関数 $\log(1+x)$ の $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開を 4 次の項まで求め、 $\log(1.02)$ の近似値を求めて下さい。

発展演習 7 関数 e^{x^2-x} の $x = 0$ の周りでの Taylor 展開（すなわち Maclaurin 展開）を x^3 の項まで求めて下さい。

発展演習 8 $f(x) = x^2$ の、 $x = 2$ での Taylor 展開を求めて下さい。

発展演習 9 関数 $\log(1+e^x)$ の $x = 0$ の周りでの Taylor 展開（すなわち Maclaurin 展開）を x^3 の項まで求めて下さい。

発展演習 10 $g(x) = \frac{1}{x}$ の、 $x = -1$ での Taylor 展開を求めて下さい。

Exercise 解答**基本演習 1**

$$\frac{1}{1-x} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}(x-5) - \frac{1}{4^3}(x-5)^2 + \cdots \quad (1 < x < 9)$$

発展演習 2

$$\frac{x}{1-x} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2^2}(x-3) - \frac{1}{2^3}(x-3)^2 + \cdots \quad (1 < x < 5)$$

基本演習 3

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

基本演習 4(1) 任意の x で絶対収束。

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{e}{n!}(x-1)^n + \cdots$$

(2) 収束半径 ∞ 。

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

(3) 収束半径 ∞ 。

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

(4) 収束半径 1。

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$$

(5) 収束半径は ∞ 。

$$\begin{aligned} \sin x = & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 4!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 \\ & + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n-1} + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \cdots \end{aligned}$$

(6) 収束半径は ∞ 。

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2! \cdot 2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{3! \cdot 2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots$$

基本演習 5

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \quad \sin 1^\circ \approx 0.017452$$

基本演習 6

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad \log(1.02) \approx 0.0198$$

発展演習 7

$$1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3$$

発展演習 8

$$x^2 = (x-2)^2 + 4(x-2) + 4$$

発展演習 9

$$\log 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2.$$

発展演習 10

$$\frac{1}{x} = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \cdots$$