

4 Taylor 展開

Exercise 解答例

基本演習 1 関数 $\frac{1}{1-x}$ を $x = 5$ のまわりのべき級数で表し、更にその表現が成り立つ範囲も求めて下さい。

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(x-5)-5} = \frac{1}{-4-(x-5)} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1-\left(-\frac{x-5}{4}\right)}$$

と変形して、公比が $-\frac{x-5}{4}$ の等比数列の無限和を考えていると思えば $\left|-\frac{x-5}{4}\right| < 1$ すなわち $1 < x < 9$ の範囲において

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= -\frac{1}{4} \frac{1}{1-\left(-\frac{x-5}{4}\right)} \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ 1 + \left(-\frac{x-5}{4}\right) + \left(-\frac{x-5}{4}\right)^2 + \cdots \right\} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}(x-5) - \frac{1}{4^3}(x-5)^2 + \cdots \end{aligned}$$

と展開されます。

発展演習 2 関数 $\frac{x}{1-x}$ を $x = 3$ のべき級数で表し、更にその表現が成り立つ範囲も求めて下さい。

まず分子を分母で割って分子が定数の形に変形します：

$$\frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x} = -1 + \frac{1}{-2-(x-3)} = -1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-3}{2}}$$

すると $\left|\frac{x-3}{2}\right| < 1$ 、すなわち $1 < x < 5$ のとき等比級数の和の式から

$$\begin{aligned} &= -1 - \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{x-3}{2}\right) + \left(-\frac{x-3}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{x-3}{2}\right)^n + \cdots \right\} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2^2}(x-3) - \frac{1}{2^3}(x-3)^2 + \cdots \end{aligned}$$

と展開されることが分かります。

基本演習 3 $f(x) = e^x$ の、 $x = 0$ での Taylor 級数を求めてください。ただし展開の可能性は既知とします。

$f^{(n)}(x) = e^x$ ですから、 $f^{(n)}(0) = 1$ であって、求める Taylor 級数は

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

です。

□

基本演習 4 次の関数を指定された点の近くで Taylor 展開して下さい。ただし、展開は可能であると仮定したうえで展開式を求め、その収束半径も求めて下さい。

- (1) e^x 、 $x = 1$ の近くで。
- (2) $\cos x$ 、 $x = 0$ の近くで。
- (3) $\sin x$ 、 $x = 0$ の近くで。
- (4) $\log(1+x)$ 、 $x = 0$ の近くで。
- (5) $\sin x$ 、 $x = \frac{\pi}{3}$ の近くで。
- (6) $\cos x$ 、 $x = \frac{\pi}{6}$ の周りで。

(1) $f(x) = e^x$ とするとこれは何回微分しても変わらずに

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(1) = e$$

となっているので、 $f(x)$ の Taylor 展開は

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{e}{n!}(x-1)^n + \cdots$$

となります。

収束半径は、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\left| \frac{\frac{e}{n!}}{\frac{e}{(n+1)!}} \right| = n + 1 \rightarrow \infty$$

により ∞ であり、従って任意の x で絶対収束する事が分かります。

(2) $g(x) = \cos x$ としてまず必要となる導関数、微分係数を求めておきます：

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin x & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \sin x & f'''(0) &= 0 \end{aligned}$$

これ以降は0階微分からの繰り返しとなる事は明らかです。

従って求める展開式は

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

となります。収束半径は前回見たように ∞ になります。

(3) $h(x) = \sin x$ と置けば、

$$\begin{aligned} h(x) &= \sin x & h(0) &= 0 & \frac{1}{0!}h(0) &= 0 \\ h'(x) &= \cos x & h'(0) &= 1 & \frac{1}{1!}h'(0) &= 1 \\ h''(x) &= -\sin x & h''(0) &= 0 & \frac{1}{2!}h''(0) &= 0 \\ h^{(3)}(x) &= -\cos x & h^{(3)}(0) &= -1 & \frac{1}{3!}h^{(3)}(0) &= -\frac{1}{3!} \\ h^{(4)}(x) &= \sin x & h^{(4)}(0) &= 0 & \frac{1}{4!}h^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

となっていて以降は周期的に繰り返すだけなので、求める展開式は

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

となります。

収束半径を求めるために

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots = x \left\{ 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots \right\}$$

とし、括弧の中味の収束半径を求める事に帰着しますが、これは $x^2 = y$ と置く事によって

$$1 - \frac{1}{3!}y + \frac{1}{5!}y^2 - \cdots$$

と書けますからまずはこれを y のべき級数と考えて収束半径を求めてみましょう。

第 n 次の係数を w_n と書くなら $w_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ ですから、

$$\left| \frac{w_n}{w_{n+1}} \right| = \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}} = (2n+3)(2n+2) \rightarrow \infty$$

となって y のべき級数としての収束半径は ∞ です。

しかし $x^2 = y$ でしたから、これは任意の x で絶対収束する事を意味し、従って x のべき級数

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots$$

の収束半径も ∞ です。以上により、Taylor 展開式

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

の収束半径も ∞ です。

(4) $g(x) = \log(1+x)$ と置けば、

$$\begin{aligned} g(x) &= \log(1+x) & g(0) &= 0 \\ g'(x) &= \frac{1}{1+x} & g'(0) &= 1 \\ g''(x) &= -(1+x)^{-2} & g''(0) &= -1 \\ g^{(3)}(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3} & g^{(3)}(0) &= (-1)(-2) \\ g^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} & g^{(4)}(0) &= (-1)(-2)(-3) \\ &\vdots & & \vdots \\ g^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} & g^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

となっており、求める展開式は

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!}x^n + \cdots \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots \end{aligned}$$

となり、この収束半径も前回見たように1です。

(5) $h(x) = \sin x$ と置けば、

$$\begin{array}{lll} h(x) = \sin x & h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{0!}h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ h'(x) = \cos x & h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} & \frac{1}{1!}h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ h''(x) = -\sin x & h''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2!}h''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!} \\ h^{(3)}(x) = -\cos x & h^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} & \frac{1}{3!}h^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2 \cdot 3!} \\ h^{(4)}(x) = \sin x & h^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4!}h^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 4!} \end{array}$$

となっているので、奇数番目の一般項は

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n-1}$$

偶数番目の一般項は

$$\frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n}$$

となって展開式は

$$\begin{aligned} \sin x = & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 4!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 \\ & + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n-1} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \cdots \end{aligned}$$

です。

また n 次の係数を p_n とすれば、

$$\left| \frac{p_n}{p_{n+1}} \right| = \begin{cases} \left| \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}+1} \frac{1}{2}}{\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2}}{(n+1)!}} \right| & n : \text{odd} \\ \left| \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+2} \frac{1}{2}}{(n+1)!}} \right| & n : \text{even} \end{cases} = \begin{cases} \frac{n+1}{\sqrt{3}} & n : \text{odd} \\ \sqrt{3}(n+1) & n : \text{even} \end{cases} \rightarrow \infty$$

となっており、収束半径は ∞ です。

(6) $f(x) = \cos x$ としてまず必要となる導関数、微分係数を求めておく：

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'(x) = -\sin x & f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \\ f''(x) = -\cos x & f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'''(x) = \sin x & f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{array}$$

これ以降は0階微分からの繰り返しとなる事は明らかです。

従って、求める Taylor 展開は、

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2! \cdot 2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{3! \cdot 2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots$$

となります。

また n 次の係数を p_n とすれば、

$$\left| \frac{p_n}{p_{n+1}} \right| = \begin{cases} \frac{n+1}{\sqrt{3}} & n : \text{odd} \\ \sqrt{3}(n+1) & n : \text{even} \end{cases}$$

となっており、

$$\frac{1}{2}(n+1) < \left| \frac{p_n}{p_{n+1}} \right|$$

から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_n}{p_{n+1}} \right| = \infty$$

が言えて収束半径は ∞ です。

基本演習 5 $\sin x$ の Taylor 展開を $x = 0$ の近くで 4 次の項まで求め、5 次以降は無視する事によって $\sin 1^\circ$ の近似値を求めて下さい。

参考値： $\frac{\pi}{180} = 0.017453$, $\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 = 0.0000053165$

展開式は基本演習 3 で見たように

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

なので、指示に従って近似値を計算すると

$$\sin 1^\circ = \sin \frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \approx 0.017452$$

であることが分かります。

基本演習 6 関数 $\log(1+x)$ の $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開を 4 次の項まで求め、 $\log(1.02)$ の近似値を求めて下さい。

展開式は基本演習 3 で求めたように

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

なので、指示の通りに近似値を求めると

$$\begin{aligned} \log(1.02) &\approx \frac{2}{100} - \frac{2^2}{2 \cdot 100^2} + \frac{2^3}{3 \cdot 100^3} - \frac{2^4}{4 \cdot 100^4} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 100^4} (6 \cdot 100^3 - 6 \cdot 100^2 + 8 \cdot 100 - 12) \\ &\approx 0.0198 \end{aligned}$$

発展演習 7 関数 e^{x^2-x} の $x = 0$ の周りでの Taylor 展開（すなわち Maclaurin 展開）を x^3 の項まで求めて下さい。

まず $r(x) = e^{x^2-x}$ として必要となる微分計算をしておく。

$$r(x) = e^{x^2-x} \qquad r(0) = 1$$

$$r'(x) = (2x-1)e^{x^2-x} \qquad r'(0) = -1$$

$$r''(x) = \{2 + (2x-1)^2\}e^{x^2-x} \qquad r''(0) = 3$$

$$r^{(3)}(x) = \{2(2x-1) \cdot 2 + 2(2x-1) + (2x-1)^3\}e^{x^2-x} \qquad r^{(3)}(0) = -7$$

以上により、求める Taylor 展開の始めの項は

$$r(0) + r'(0)x + \frac{1}{2!}r''(0)x^2 + \frac{1}{3!}r^{(3)}(0)x^3 = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3$$

となる。

発展演習 8 $f(x) = x^2$ の、 $x = 2$ での Taylor 展開を求めて下さい。

$x^2 = (x-2)^2 + 4x - 4 = (x-2)^2 + 4(x-2) + 4$ であり、この右辺は全ての項が $x-2$ のべき乗の形になっているので、これが求める Taylor 展開である。

発展演習 9 関数 $\log(1 + e^x)$ の $x = 0$ の周りでの Taylor 展開（すなわち Maclaurin 展開）を x^3 の項まで求めて下さい。

まずは必要となる微分計算をやっておく。 $g(x) = \log(1 + e^x)$ とする。

$$\begin{aligned} g(x) &= \log(1 + e^x) & g(0) &= \log 2 \\ g'(x) &= \frac{e^x}{1 + e^x} & g'(0) &= \frac{1}{2} \\ g^{(2)}(x) &= \frac{e^x(1 + e^x) - e^{2x}}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} & g^{(2)}(0) &= \frac{1}{4} \\ g^{(3)}(x) &= \frac{e^x(1 + e^x)^2 - e^x 2(1 + e^x)e^x}{(1 + e^x)^4} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^4} & g^{(3)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

以上によれば求める展開式は次の通り：

$$\log 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2.$$

発展演習 10 $g(x) = \frac{1}{x}$ の、 $x = -1$ での Taylor 展開を求めて下さい。

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{-1 + (x+1)} = -\frac{1}{1 - (x+1)}$$

と変形出来るので、 $|x + 1| < 1$ の範囲においてはこれは等比級数の和として $-\{1 + (x+1) + (x+1)^2 + \dots\}$ である事が分かるので、求める Taylor 展開は、

$$\frac{1}{x} = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \dots$$

である（収束する範囲は $-2 < x < 0$ ）。