# 4 Taylor 展開

| ■今日の講義内容 |
| --- |
| 中心がシフトしたべき級数<br>Taylor 展開<br>Taylor 展開を使った近似計算 |
| ■講義中にやらなければならない事 |
| 基本演習 1<br>基本演習 3<br>基本演習 6 |
| ■講義終了後次回までにやらなければならない事 |
| 今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。 |
| 基本演習 2<br>基本演習 4 |

## 重要事項

**定義 4.1** $x$ を変数とした形式的な定数係数の無限和：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

のことを $x-c$ のべき級数、あるいは $x=c$ のまわりのべき級数と言います。

**定義 4.2** 関数 $f(x)$ が $x=a$ の近くで $x-a$ のべき級数に展開されるならば、それは

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

の形でなければなりません。

いつも上のような展開式が成立するわけではありませんが、もし可能であるならばこの右辺のべき級数を、$x=a$ のまわりでの $f(x)$ の Taylor 級数あるいは Taylor 展開と言います。また、特に $x=0$ のまわりでの Taylor 展開のことを Maclaurin 展開とも言います。

**問題 4.3** $\sqrt{x}$ が $x=1$ で Taylor 展開可能であることは既知としてその展開式を求め、更にその収束半径も求めて下さい。

$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ として何回か微分してみると、

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{\frac{1}{2}} & f(1) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} & f'(1) &= \frac{1}{2} \\
f^{(2)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^{\frac{1}{2}-2} & f^{(2)}(1) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \\
f^{(3)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^{\frac{1}{2}-3} & f^{(3)}(1) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)
\end{aligned}$$

となっているので第 $n$ 階の微分は

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

となっていると予想されます。実際この右辺を微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\left\{x^{-\frac{2n-1}{2}}\right\}' \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\left(\frac{1}{2}-n\right)x^{-\frac{2n-1}{2}-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-\{n+1\}+1\right)x^{-\frac{2(n+1)-1}{2}}
\end{aligned}$$

となっていますから確かに帰納法によってこのことは確かめられ、結局求める Taylor 展開式は

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(x-1)^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(x-1)^3 + \cdots$$

となります。

また、展開の $n$ 次の係数を $a_n$ と書くと、$n\to\infty$ のとき

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}}{\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-\{n+1\}+1\right)}{(n+1)!}}\right| = \frac{n+1}{n-\frac{1}{2}} \to 1$$

ですから収束半径は $1$ です。 □

## Taylor 展開を使った近似値計算の例

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

この無限和を全部足せば Napier 数になるわけですが、その無限和計算をどこか途中でストップすれば Napier 数の近似値を得る事が出来ます。

例えば０次、１次、２次、３次のところで区切ってそれ以降は無視すると、

０次近似　$\mathrm{e} \approx 1$

１次近似　$\mathrm{e} \approx 1 + 1 = 2$

２次近似　$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2.5$

３次近似　$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2.666\ldots$

となっていますね。ちなみに Napier 数の正確な値は、

$$\mathrm{e} = 2.7182818284590452353602874713 52\ldots$$

ですから、まあ、３次くらいの近似になるとまずまずと云ったところでしょうか。更に高次の近似をすると、

４次近似　$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2.70833\ldots$

５次近似　$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2.71666\ldots$

となって更に良い近似が得られます。

## Exercise

**基本演習 1** 関数 $\frac{1}{1-x}$ を $x = 5$ のまわりのべき級数で表し、更にその表現が成り立つ範囲も求めて下さい。

**発展演習 2** 関数 $\frac{x}{1-x}$ を $x - 3$ のべき級数で表し、更にその表現が成り立つ範囲も求めて下さい。

**基本演習 3** $f(x) = \mathrm{e}^x$ の、$x = 0$ での Taylor 級数を求めてください。ただし展開の可能性は既知とします。

**基本演習 4** 次の関数を指定された点の近くで Taylor 展開して下さい。ただし、展開は可能であると仮定したうえで展開式を求め、その収束半径も求めて下さい。

(1) $\mathrm{e}^x$、$x = 1$ の近くで。

(2) $\cos x$、$x = 0$ で。

(3) $\sin x$、$x = 0$ の近くで。

(4) $\log(1 + x)$、$x = 0$ のまわりで。

(5) $\sin x$、$x = \frac{\pi}{3}$ の近くで。

(6) $\cos x$、$x = \frac{\pi}{6}$ の周りで。

**基本演習 5** $\sin x$ の Taylor 展開を $x = 0$ の近くで４次の項まで求め、５次以降は無視する事によって $\sin 1^\circ$ の近似値を求めて下さい。
参考値：$\frac{\pi}{180} = 0.017453, \quad \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 = 0.0000053165$

**基本演習 6** 関数 $\log(1 + x)$ の $x = 0$ のまわりでの Taylor 展開を４次の項まで求め、$\log(1.02)$ の近似値を求めて下さい。

**発展演習 7** 関数 $\mathrm{e}^{x^2 - x}$ の $x = 0$ の周りでの Taylor 展開（すなわち Maclaurin 展開）を $x^3$ の項まで求めて下さい。

**発展演習 8** $f(x) = x^2$ の、$x = 2$ での Taylor 展開を求めて下さい。

**発展演習 9** 関数 $\log(1 + \mathrm{e}^x)$ の $x = 0$ の周りでの Taylor 展開（すなわち Maclaurin 展開）を $x^3$ の項まで求めて下さい。

**発展演習 10** $g(x) = \frac{1}{x}$ の、$x = -1$ での Taylor 展開を求めて下さい。