

5 平均値の定理と誤差の評価

5.1 平均値の定理

事実 5.1 [閉区間上の連続関数の性質] 閉区間 J を含む領域で定義された連続関数 $f(x)$ は、 J 内での最大値と最小値をもちます。

定理 5.2 [Rolle の定理 (M.Rolle 1691)]

前提条件： (i) $f(x)$ は $[a, b]$ で連続
(ii) $f(x)$ は (a, b) で微分可能
(iii) $f(a) = f(b)$

主張内容： $f'(c) = 0$ となる点 c が $a < c < b$ の範囲内にある

もともとは微分とは無関係に、重解条件や方程式の解法を考える中で認識されましたが、後日微分を使った形にまとめられ、更に平均値の定理に統合され現在に至ります。

【証明 U.Dini 1878】 $f(x)$ の $[a, b]$ での最大値と最小値が一致していれば $f(x)$ は一定値であり自明。そうでないならば最大値・最小値のうち少なくとも一方は区間内部に存在します。

区間内部の c において最大値 $f(c) = M$ が達成される場合は、

$$\lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - M}{x - c} \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - M}{x - c} \leq 0$$

ですから

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq 0$$

となって $f'(c) = 0$ が分かります。最小値が達成される場合も同様です。 □

基本演習 1 $f(x) = e^x - (ax + b)$ であるとき、 $f(x) = 0$ の解は高々 2 つであることを証明してください。

$f'(x) = e^x - a$ であり、 e^x が (狭義) 単調増加であることによれば、 $f'(x) = 0$ の解は $a > 0$ のとき 1 個、 $a \leq 0$ のとき 0 個です。

もしも $f(x) = 0$ が異なる 3 つの解 $x_1 < x_2 < x_3$ をもてば、Rolle の定理により、 $x_1 < c < x_2 < d < x_3$ なる c, d で $f'(c) = f'(d) = 0$ となるものが存在し、矛盾です。

従って、題意は成立します。 □

定理 5.3 [平均値の定理 (B.Cavalieri 1635, J.-L.Lagrange 1801)]

前提条件： (i) $f(x)$ は $[a, b]$ で連続
(ii) $f(x)$ は (a, b) で微分可能

主張内容： $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ となる点 c が $a < c < b$ の範囲内にある

【証明 P.O.Bonnet 1868 頃】 関数 $f(x)$ のグラフ上の異なる 2 点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る割線 (secant) の方程式は

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

であり、グラフとこの直線の差：

$$D(x) = f(x) - y = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

を考えると、 $D(a) = 0$, $D(b) = 0$ なので Rolle の定理により $D'(c) = 0$ となるような c が $a < c < b$ の範囲に存在します。ここで

$$D'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

によれば

$$D'(c) = 0 \iff \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

ですからこの c が題意を満たす点です。 □

このような証明は後世のものであって、Lagrange 自身がこのようなことを考えたわけではなく、平均値の定理を最初にきちんと証明したと言われる Cauchy (1823 年頃) でさえ、このようなすっきりとした議論を行ったわけではありませんでした。

基本演習 3 $\alpha > 1, x > 1$ のとき不等式：

$$\alpha(x-1) < x^\alpha - 1 < \alpha x^{\alpha-1}(x-1)$$

が成り立つことを示して下さい。

$\alpha > 1, x > 1$ とします。平均値の定理のよれば、

$$\frac{x^\alpha - 1^\alpha}{x - 1} = \alpha c^{\alpha-1}$$

となるような c で $1 < c < x$ であるようなものが少なくとも1つ存在しますので、そのような1つを取れば、 $1 < c < x$ のとき

$$1 = 1^{\alpha-1} < c^{\alpha-1} < x^{\alpha-1}$$

であることから

$$\alpha < \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} < \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\alpha(x-1) < x^\alpha - 1 < \alpha x^{\alpha-1}(x-1)$$

が成り立っています。以上で題意は示されました。 $\square$

Cavalieri、Rolle に始まった平均値の定理は、Cauchy の時代にはより一般的な形で認識されるようになっていました。

定理 5.4 [Cauchy の平均値の定理 (A.L.Cauchy 1823)]

(本質的な) 前提条件 (i) $f(x), g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続
(ii) $f(x), g(x)$ は开区間 (a, b) で微分可能
(技術的な) 前提条件 (iii) $a < x < b$ で $g'(x) \neq 0$

主張内容 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ となるような c が
 $a < c < b$ の範囲に少なくとも1つ存在します

【証明 P.O.Bonnet 1868 頃】

$$D(x) = \{f(b) - f(a)\}\{g(x) - g(a)\} - \{g(b) - g(a)\}\{f(x) - f(a)\}$$

と置けば $D(a) = D(b) = 0$ ですから Rolle の定理によって

$$D'(c) = \{f(b) - f(a)\}g'(c) - \{g(b) - g(a)\}f'(c) = 0$$

となるような c が $a < c < b$ の範囲に存在します。

仮定により $g'(c) \neq 0$ であり、また、もしも $g(b) - g(a) = 0$ であったならばやはり Rolle の定理によって前提条件 (iii) に反するような点が存在してしまうため $g(b) - g(a) \neq 0$ なので先の式は

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

と変形され、題意を得ます。 $\square$

5.2 平均値の定理を使った近似計算

今 $f(b)$ の値が分からないので近似値を求めたいのですが、 b に“近い” $x = a$ では $f(x)$ の様子がよく分かっている場合に、ここでの値を使って近似値を計算することを考えます。 $f(x)$ は何度でも微分可能であるとします。

$f(x)$ は特に連続関数ですから a と b が十分近ければ当然 $f(a)$ と $f(b)$ も近い：

$$f(b) \approx f(a)$$

わけです。具体的な例で言えば $\sin 31^\circ$ は大体 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ だろうと云う事ですが、このときの誤差、即ち $f(b)$ を $f(a)$ だと思ったときの誤差はどれくらいなのでしょう？

要するにこれは差 $f(b) - f(a)$ がどの程度なのかと云う事ですが、平均値の定理によれば、 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ となる様な c が a と b の間に存在しますから、誤差は $f'(c)(b - a)$ と云う形に書けることが分かります。

定理 5.5 [平均値の定理を使った近似] $f(x)$ が十分微分可能であれば任意の $a \neq b$ に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a)}_{\text{近似値}} + \underbrace{f'(c)(b - a)}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在します。

この c は単に a と b の間にあると言えるだけで具体的な数値が分かるわけではありませんが、 $f'(x)$ も連続関数ですから、その値が a の近くでどの程度であるかぐらいは分かる筈で、大まかな誤差の大きさはこれで調べることが出来ます。

具体例で言えば、 $31^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$ ですから、

$$\sin 31^\circ = \sin \frac{\pi}{6} + (\cos c) \frac{\pi}{180}$$

であって、 $\cos c$ の絶対値が 1 以下であることを使えば誤差は

$$|(\text{誤差})| \leq \frac{\pi}{180} = 0.017453292\dots$$

と評価されます。

5.3 誤差の評価

誤差と云うものは正確な値を求める事が出来ないものです（正確に求められるのなら、それはその時点で誤差ではありません）。従って『誤差は・・・である』と云う断定的な言い方は出来ず、『誤差は・・・より小さい』程度の事しか言えません。

しかし例えば近似値が 2 の時に『誤差は 100 以下である』などと言ってみたところで意味がありませんし、誤差は小さいほど嬉しいわけですから、誤差を最も大きく見積もってどれくらいであるかを出来るだけ小さく評価する事に興味があります。

また、誤差が 1 である事と -1 である事は、ずれの向きが違っただけでずれの大きさは一緒ですから誤差はその絶対値が問題となります。

数学的に言えば、次式：

$$|(\text{誤差})| \leq M$$

を満たす定数 M のうち出来るだけ小さいものを求めようとそう云う事です。

この誤差を評価する定数の事を『誤差の限界』と言ったりしますが、『誤差の限界を求めて下さい』と云う問題には正解はありません。

A さんが誤差の限界は $\frac{1}{100}$ だと云ったとしても、誤差がきっちり $\frac{1}{100}$ であるわけではありませんので本当はもう少し小さい値例えば $\frac{1}{102}$ よりも小さい可能性があります。だから他の B さんが詳しく計算して、誤差の絶対値がこの $\frac{1}{102}$ より小さい事を証明するかも知れません。

これはどちらが正解でどちらが不正解と云う類いの話ではなくて、A さんの回答よりも B さんの回答の方が『良かった』と云うだけです。

基本演習 5 平均値の定理による近似方法（誤差が 1 次のもの）を使って、 $\cos 119^\circ$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

ただし $\frac{\pi}{180} = 0.0175$ として計算して下さい。

$f(x) = \cos x$ として $f(119^\circ)$ の値を $x = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ での値を使って近似します。
 $f'(x) = -\sin x$ ですから、平均値の定理によれば $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{180} < c < \frac{2\pi}{3}$ なる c で、

$$f(119^\circ) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f'(c)\left(-\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{1}{2} + \sin c \frac{\pi}{180}$$

となるものが存在します。右辺第 1 項を近似値、残りを誤差とすれば、

$$(\text{近似値}) = -0.5, \quad |(\text{誤差})| = |\sin c| \cdot 0.0175 \leq 0.0175$$

が分かります。

□

5.4 更に精度の高い近似

前節の近似式：

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

をよく見ると、 b が十分 a に近いのならその間にある c も十分 a に近い筈で、そう考えると $f'(c)$ は大体 $f'(a)$ であろうと予想されます：

$$f(b) \approx f(a) + f'(a)(b-a)$$

そこで次のステップとして $f(b)$ を $f(a) + f'(a)(b-a)$ で近似する事を考えてみましょう。

$f(x)$ が Taylor 展開出来るとしてその展開式を変形すれば

$$f(b) - \{f(a) + f'(a)(b-a)\} = \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(b-a)^3 + \dots$$

となっている筈で、ここで右辺をよく見ると、 a と b が十分近い場合、 $(b-a)^2$ に比べて $(b-a)^3$ やそれ以上のべきは格段に小さいわけです：

$$b-a = \frac{1}{100} \text{ なら } (b-a)^2 = \frac{1}{10000}, (b-a)^3 = \frac{1}{1000000}$$

から、右辺のうち一番大きそうな項は最初の項 $\frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2$ であって、誤差の大半はこの部分が占めていると考えられます。だから誤差はこの第1項程度の大きさであろうと推察されます。

そこで、その誤差の大きさを決定している $(b-a)^2$ と左辺の比 R を考えてみると：

$$R = \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}$$

ですが、 $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$, $G(x) = (x-a)^2$ と置けば $F(a) = G(a) = 0$ ですから、

$$R = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)}$$

と書けることになり、Cauchy の一般化された平均値定理によれば

$$R = \frac{F'(h)}{G'(h)}$$

が成り立つ様な h が a と b の間にあることが分かります。これを具体的に書けば

$$R = \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} = \frac{f'(h) - f'(a)}{2(h-a)}$$

となりますが、今度は普通の平均値の定理を $f'(x)$ に対して適用すれば、

$$= \frac{1}{2}f''(c)$$

となる c が a と h の間に（従って a と b の間に）存在する事が分かるので、結局、

$$f(b) - \{f(a) + f'(a)(b-a)\} = \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2$$

となり、 $f(b)$ を $f(a) + f'(a)(b-a)$ で近似したときの誤差が $\frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2$ と書ける事が分かりました。今度の誤差は大体 $(b-a)^2$ のオーダーですから、前節よりも精度の高い近似となっていそうですね！

定理 5.6 [Cauchy の平均値の定理を使った近似] $f(x)$ が十分微分可能であれば、任意の $a \neq b$ に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a)}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在します。

実際に具体例で計算してみれば、

$$\begin{aligned} \sin 31^\circ &= \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \frac{\pi}{180} + \frac{1}{2!}(-\sin c) \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{180} + \frac{1}{2}(-\sin c) \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \end{aligned}$$

ですから、

$$(\text{近似値}) = 0.5 + 0.015114994\dots = 0.515114994\dots$$

$$|(\text{誤差})| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0.0001523087\dots$$

となっており、確かにさっきの誤差と比べて小さな誤差である事が分かります。それだけ精度の高い近似値が得られたと云う事です。

基本演習 6 Cauchy の平均値の定理による近似方法（誤差が2次のもの）を使って、 $\sqrt{10}$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

$f(x) = \sqrt{x}$ として、 $f(10)$ を $x=9$ での値を使って近似します。

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

ですから、Cauchy の平均値の定理によれば、 $9 < c < 10$ である c で、

$$f(10) = f(9) + f'(9)(10-9) + \frac{1}{2!}f''(c)(10-9)^2$$

となるようなものが存在します。そこで右辺第2項までを近似値、残りを誤差とすれば、

$$(\text{近似値}) = 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 3.166\dots$$

$$|(\text{誤差})| = \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{c}^3} < \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3^3} < 0.00463$$

が得られます。

□

Exercise

基本演習 1 $f(x) = e^x - (ax + b)$ であるとき、 $f(x) = 0$ の解は高々 2 つであることを証明してください。

基本演習 2 $f(x) = e^x - (ax^2 + bx + c)$ であるとき、 $f(x) = 0$ の解は多くても 3 つであることを証明してください。

基本演習 3 $\alpha > 1, x > 1$ のとき不等式：

$$\alpha(x-1) < x^\alpha - 1 < \alpha x^{\alpha-1}(x-1)$$

が成り立つことを示して下さい。

基本演習 4 $e \leq p < q$ のとき次式が成り立つことを示して下さい：

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}.$$

ただし、 $2 < e$ であることは既知とします。

基本演習 5 平均値の定理による近似方法（誤差が 1 次のもの）を使って、 $\cos 119^\circ$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

ただし $\frac{\pi}{180} = 0.0175$ として計算して下さい。

基本演習 6 Cauchy の平均値の定理による近似方法（誤差が 2 次のもの）を使って、 $\sqrt{10}$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

基本演習 7 Cauchy の平均値の定理による近似方法（誤差が 2 次のもの）を使って、 $\cos 119^\circ$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

幾つかの無理数は下記の値を使って計算して下さい：

$$\frac{\pi}{180} = 0.0175, \quad \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0.000305, \quad \sqrt{3} = 1.73$$

基本演習 8 Cauchy の平均値の定理による近似を使って $\sin 47^\circ$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

$$\text{参考値：} \frac{\pi}{180} = 0.0175, \quad \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0.000305, \quad \sqrt{2} = 1.41$$

基本演習 9 Cauchy の平均値の定理による近似を $x = \frac{\pi}{2}$ の近くで適用し、 $\sin 93^\circ$ の値について近似値と誤差の限界をそれぞれ小数点以下 5 桁まで求めて下さい（6 桁以下は切り捨て）。

$$\text{参考値：} \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 = 0.0027415$$

Exercise 解答

基本演習 7

$$(\text{近似値}) = -0.48488, \quad |(\text{誤差})| \leq 0.00015$$

細かいことを言えば

$$|(\text{誤差})| \leq 0.000075$$

と云う風により精密な誤差評価も出来ます。

□

基本演習 8

近似値は 0.730 であり、誤差の絶対値を大きく見積もった値は 0.000610。

□

基本演習 9

$$(\text{近似値}) = 1, \quad (\text{誤差の限界}) = 0.00137$$

□