

5 平均値の定理と誤差の評価

Exercise 解答例

基本演習 1 $f(x) = e^x - (ax + b)$ であるとき、 $f(x) = 0$ の解は高々 2 つであることを証明してください。

基本演習 2 $f(x) = e^x - (ax^2 + bx + c)$ であるとき、 $f(x) = 0$ の解は多くても 3 つであることを証明してください。

$f(x) = e^x - ax^2 - bx - c$ として微分を計算すると

$$f'(x) = e^x - 2ax - b, \quad f''(x) = e^x - 2a$$

ですから、 $f''(x) = 0$ となる x は 0 個か 1 個のどちらかです (a の値による)。

もしも $f'(x) = 0$ となる x が 3 つあって $p < q < r$ であったとすると

$$f'(p) = f'(q) = f'(r)$$

ですから Rolle の定理により、 $f''(s) = 0$ となる s が $p < s < q$ の範囲にあり、 $f''(t) = 0$ となる t が $q < t < r$ の範囲にあることになり、上で確認した事実と反しますから $f'(x) = 0$ となる x の個数は最大でも 2 個であることが分かります。

同様にもしも $f(x) = 0$ となる x が 4 つあったら、 $f'(x) = 0$ となる x は少なくとも 3 つあることになり、やはり上で確認した事実と反しますから $f(x) = 0$ となるような x は最大でも 3 つしかないことが分かります。□

基本演習 3 $\alpha > 1, x > 1$ のとき不等式：

$$\alpha(x-1) < x^\alpha - 1 < \alpha x^{\alpha-1}(x-1)$$

が成り立つことを示して下さい。

基本演習 4 [2001 名古屋大] $e \leq p < q$ のとき次式が成り立つことを示して下さい：

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}.$$

ただし、 $2 < e$ であることは既知とします。

$f(x) = \log \log x$ と置けば、これは $x > 1$ で定義され、

$$\frac{\log(\log q) - \log(\log p)}{q-p} = \frac{f(q) - f(p)}{q-p}$$

であり、平均値の定理によれば $(\log \log x)' = \frac{1}{x \log x}$ に注意して

$$\frac{\log(\log q) - \log(\log p)}{q-p} = \frac{1}{r \log r}$$

となるような r が $p < r < q$ の範囲に存在しますから、 $1 = \log e \leq \log p < \log r$ であることと $e < r$ であることに注意すれば

$$\frac{\log(\log q) - \log(\log p)}{q-p} < \frac{1}{e}$$

が分かり、これは題意の不等式が成り立つことを意味します。□

基本演習 5 平均値の定理による近似方法 (誤差が 1 次のもの) を使って、 $\cos 119^\circ$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

ただし $\frac{\pi}{180} = 0.0175$ として計算して下さい。

基本演習 6 Cauchy の平均値の定理による近似方法 (誤差が 2 次のもの) を使って、 $\sqrt{10}$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

基本演習 7 Cauchy の平均値の定理による近似方法（誤差が2次のもの）を使って、 $\cos 119^\circ$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

幾つかの無理数は下記の値を使って計算して下さい：

$$\frac{\pi}{180} = 0.0175, \quad \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0.000305, \quad \sqrt{3} = 1.73$$

【解答例】まず計算しておくと $119^\circ = 120^\circ - 1^\circ = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{180}$ です。

そこで $f(x) = \cos x$ として Cauchy の平均値の定理による近似によれば、

$$f(119^\circ) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)\left(-\frac{\pi}{180}\right) + \frac{1}{2!}f''(c)\left(-\frac{\pi}{180}\right)^2$$

となる様な c が 119° と $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ の間に存在します。

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$ なのでこれは

$$\cos 119^\circ = \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2!} \cos c \left(\frac{\pi}{180}\right)^2$$

となる c が存在することを意味しますから近似値は

$$\cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \frac{\pi}{180} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{180} = -0.48488$$

であり、その時の誤差の絶対値は

$$\left| -\frac{1}{2!} \cos c \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \right| = \frac{1}{2} |\cos c| \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0.00015$$

と評価する事が出来ます。

細かいことを言えば

$$\frac{1}{2} |\cos c| \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \left| \cos \frac{3\pi}{2} \right| \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0.000075$$

と云う風により精密な誤差評価も出来ます。

□

基本演習 8 Cauchy の平均値の定理による近似を使って $\sin 47^\circ$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

$$\text{参考値: } \frac{\pi}{180} = 0.0175, \quad \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0.000305, \quad \sqrt{2} = 1.41$$

【解答例】 $\sin x$ を2階まで微分してみると

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\sin x)'' = -\sin x$$

となっているので Cauchy の平均値の定理による近似により、

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \sin c \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

となる様な c が x と $\frac{\pi}{4}$ の間に存在する事が分かります。

そこで、 $x = 47^\circ = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{180}$ の時について見れば、

$$\begin{aligned} \sin 47^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2\pi}{180}\right) - \frac{1}{2!} \sin c \left(\frac{2\pi}{180}\right)^2 \\ &= \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{180} \right\} - 2 \sin c \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \end{aligned}$$

となる c が存在する事が分かります。ここで最初の2項をまとめたものが近似値、最後の項が誤差なので、近似値は0.730であり、最後の項の評価：

$$\left| -2 \sin c \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \right| \leq 2 \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0.000610$$

によれば、誤差の絶対値を大きく見積もった値は0.000610となります。

□

基本演習 9 Cauchy の平均値の定理による近似を $x = \frac{\pi}{2}$ の近くで適用し、 $\sin 93^\circ$ の値について近似値と誤差の限界をそれぞれ小数点以下5桁まで求めて下さい（6桁以下は切り捨て）。

$$\text{参考値: } \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 = 0.0027415$$

【解答例】まず $f(x) = \sin x$ として微分計算をやっておきましょう。

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f^{(2)}(x) = -\sin x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Cauchy の平均値の定理による近似によれば、

$$f(b) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(b - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(c)\left(b - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

となる様な c が b と $\frac{\pi}{2}$ の間に存在します。

ここにさっき計算した結果を代入すると、

$$f(b) = 1 - \frac{1}{2!}\sin c\left(b - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

であり、 $b = 93^\circ = \frac{93\pi}{180}$ の場合は、

$$\sin 93^\circ = 1 - \frac{1}{2}\sin c\left(\frac{\pi}{60}\right)^2$$

となるような c が $\frac{90\pi}{180} < c < \frac{93\pi}{180}$ の範囲に存在します。このときの近似値は

$$(\text{近似値}) = 1$$

となり、また、

$$\left| -\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{\pi}{60}\right)^2 \right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{60}\right)^2$$

から誤差の限界は

$$(\text{誤差の限界}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{60}\right)^2 = 0.00137$$

となる事が解ります。

□