5 平均値の定理と誤差の評価

■今日の講義内容

平均値の定理

平均値の定理を使った近似計算

誤差の評価

■講義中にやらなければならない事

基本演習 3,5,6

■講義終了後次回までにやらなければならない事

今日の講義全体を振り返り（特に話の流れに留意して）内容を把握し直すこと。

基本演習 7

課題 2.1

重要事項

事実 5.1 [閉区間上の連続関数の性質] 閉区間 J を含む領域で定義された連続関数 $f(x)$ は、 J 内での最大値と最小値をもちます。

定理 5.2 [Rolle の定理 (M.Rolle 1691)]

- 前提条件： (i) $f(x)$ は $[a, b]$ で連続
 (ii) $f(x)$ は (a, b) で微分可能
 (iii) $f(a) = f(b)$

主張内容： $f'(c) = 0$ となる点 c が $a < c < b$ の範囲内にあります

定理 5.3 [平均値の定理 (B.Cavalieri 1635, J.-L.Lagrange 1801)]

- 前提条件： (i) $f(x)$ は $[a, b]$ で連続
 (ii) $f(x)$ は (a, b) で微分可能

主張内容： $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ となる点 c が $a < c < b$ の範囲内にあります

定理 5.4 [Cauchy の平均値の定理 (A.L.Cauchy 1823)]

- (本質的な) 前提条件 (i) $f(x), g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続
 (ii) $f(x), g(x)$ は开区間 (a, b) で微分可能
 (技術的な) 前提条件 (iii) $a < x < b$ で $g'(x) \neq 0$

主張内容 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ となるような c が
 $a < c < b$ の範囲に少なくとも 1 つ存在します

定理 5.5 [平均値の定理を使った近似] $f(x)$ が十分微分可能であれば任意の $a \neq b$ に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a)}_{\text{近似値}} + \underbrace{f'(c)(b-a)}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在します。

定理 5.6 [Cauchy の平均値の定理を使った近似] $f(x)$ が十分微分可能であれば、任意の $a \neq b$ に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a)}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在します。

Exercise

基本演習 1 $f(x) = e^x - (ax + b)$ であるとき、 $f(x) = 0$ の解は高々 2 つであることを証明してください。

基本演習 2 $f(x) = e^x - (ax^2 + bx + c)$ であるとき、 $f(x) = 0$ の解は多くても 3 つであることを証明してください。

基本演習 3 $\alpha > 1, x > 1$ のとき不等式：

$$\alpha(x-1) < x^\alpha - 1 < \alpha x^{\alpha-1}(x-1)$$

が成り立つことを示して下さい。

基本演習 4 $e \leq p < q$ のとき次式が成り立つことを示して下さい：

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}.$$

ただし、 $2 < e$ であることは既知とします。

基本演習 5 平均値の定理による近似方法（誤差が 1 次のもの）を使って、 $\cos 119^\circ$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

ただし $\frac{\pi}{180} = 0.0175$ として計算して下さい。

基本演習 6 Cauchy の平均値の定理による近似方法（誤差が 2 次のもの）を使って、 $\sqrt{10}$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

基本演習 7 Cauchy の平均値の定理による近似方法（誤差が 2 次のもの）を使って、 $\cos 119^\circ$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

幾つかの無理数は下記の値を使って計算して下さい：

$$\frac{\pi}{180} = 0.0175, \quad \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0.000305, \quad \sqrt{3} = 1.73$$

基本演習 8 Cauchy の平均値の定理による近似を使って $\sin 47^\circ$ の近似値を求めて下さい。そのとき、誤差の絶対値が大きく見積もってどれくらいであるかも示して下さい。

$$\text{参考値：} \frac{\pi}{180} = 0.0175, \quad \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0.000305, \quad \sqrt{2} = 1.41$$

基本演習 9 Cauchy の平均値の定理による近似を $x = \frac{\pi}{2}$ の近くで適用し、 $\sin 93^\circ$ の値について近似値と誤差の限界をそれぞれ小数点以下 5 桁まで求めて下さい（6 桁以下は切り捨て）。

$$\text{参考値：} \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 = 0.0027415$$

Assignment

課題 2.1 次の関数に対して Cauchy の平均値の定理による近似を行い、それによって与えられた数値の近似値と誤差の限界を求めて下さい。

$$\log(1+x) \quad (\text{ただし } x=0 \text{ のまわりで}), \quad \log(1.02)$$

出題：5月9日

通常提出期限：5月16日 講義開始時

最終提出期限：5月17日 17時00分00秒