6　Taylor の定理

6.1　0 次・1 次の近似

前回平均値の定理を使った近似値／誤差の計算方法を見ました：

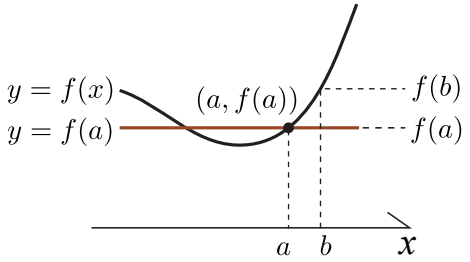
定理 6.1 [平均値の定理を使った 0 次近似] $f(x)$ が十分微分可能であれば、任意の $a \neq b$ に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a)}_{\text{近似値}} + \underbrace{f'(c)(b-a)}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在します。

b の代わりに x と書けば分かり易いでしょう。要するに関数 $y = f(x)$ を定数関数（0 次関数）$y = f(a)$ で近似しているわけです。これを『0 次の近似』と言います。

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = f(a)$ は点 $(a, f(a))$ で交わっていますが、図のように近くの $x = b$ に相当する点が互いに近いと考えているわけです。



定理 6.2 [Cauchy の平均値の定理を使った 1 次近似] $f(x)$ が十分微分可能であれば、任意の $a \neq b$ に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a)}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2}_{\text{誤差}}$$

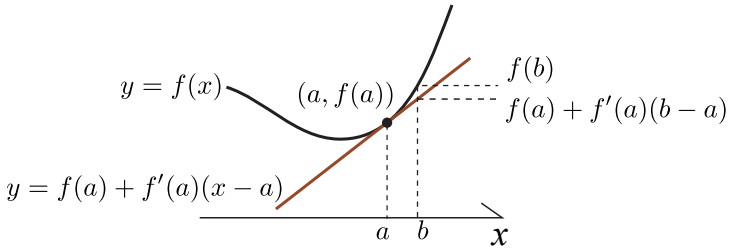
となる様な c が a と b の間に存在します。

同様に b の代わりに x と云う文字を使ってみると、近似値は

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

と云う風に $x - a$ の 1 次関数になっていますのでこれは『1 次の近似』と呼ばれます。

つまり関数 $f(x)$ を 1 次関数、すなわち直線で近似しているわけですが、この直線 $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ は点 $(a, f(a))$ を通っており、傾きが $f'(a)$ ですから、これは曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ での接線に他なりません。



6.2　2 次の近似

Cauchy の平均値の定理を使った近似式において、更に誤差の中の $f''(c)$ を $f''(a)$ で近似してやる事によって

$$f(b) \approx f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2$$

と云う新たな近似が得られますので、このときの誤差を調べてみましょう。

先週同様に Taylor 展開の形から類推してこの誤差は大体 $(b-a)^3$ 程度の大きさだろうと考えられますので比：

$$R = \frac{f(b) - \left\{f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2\right\}}{(b-a)^3}$$

を計算してみます。

分子、分母において b を x に換えたものをそれぞれ $H(x), K(x)$ とすると、

$$H(x) = f(x) - \left\{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2\right\}, \quad K(x) = (x-a)^3$$

なので、$H(a) = K(a) = 0$ に注意すれば

$$R = \frac{H(b) - H(a)}{K(b) - K(a)}$$

と云う形になっていますので Cauchy の平均値の定理から

$$R = \frac{H'(c)}{K'(c)} = \frac{f'(c) - f'(a) - f''(a)(c-a)}{3(c-a)^2}$$

となる様な c が a, b の間に存在します。ここで更に分子・分母で c を x に換えたものをそれぞれ $J(x), L(x)$ とすれば、やはり $J(a) = L(a) = 0$ に注意して

$$R = \frac{J(c) - J(a)}{3\{L(c) - L(a)\}}$$

と書けることになるので再び Cauchy の平均値の定理から

$$R = \frac{J'(d)}{3L'(d)} = \frac{f''(d) - f''(a)}{3 \cdot 2(d-a)}$$

となる d が a, c の間に存在します。最後に普通の平均値の定理から

$$= \frac{1}{3!} f^{(3)}(p)$$

となる p が a, d の間に、従って特に a, b の間に存在する事が分かります。以上から、

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}(b-a)^2}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{1}{3!} f^{(3)}(p)(b-a)^3}_{\text{誤差}}$$

となるわけですから近似値は 2 次の項まで、誤差はより小さい（と思われる）$(b-a)^3$ 程度の大きさにする事が出来ました。これを『2 次の近似』と言います。

定理 6.3 [Cauchy の平均値の定理を使った 2 次近似 **]** $f(x)$ が十分微分可能であれば、任意の $a \neq b$ に対して

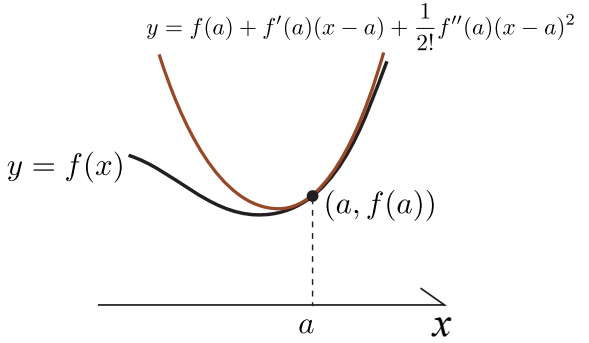
$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(b-a)^2}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{1}{3!} f'''(c)(b-a)^3}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在します。

これは要するに関数 $y = f(x)$ を 2 次関数 $y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2$ で近似しているわけですが、この 2 次関数は点 $(a, f(a))$ を通っていて、実際に微分を計算してみれば分かる通り

$$y'(a) = f'(a), \quad y''(a) = f''(a)$$

が成り立つような関数であるわけです。従って 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2$（放物線です）は、共通の点 $(a, f(a))$ を通っていて、そこで接線が一致し、更に 2 階微分係数が表す“曲がり具合”も一致するような関係にあるわけです。



6.3　Taylor の定理

以降、同じ議論を繰り返せば任意の次数で近似する事が出来ます：

定理 6.4 [Taylor の定理（n 次近似）　J.Gregory, 1671 ; B.Taylor, 1712 **]**
$f(x)$ が何回でも微分出来るとき、任意の $a \neq b$ と任意の正の整数 n に対して

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(b-a)^n}_{\text{近似値}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}_{\text{誤差}}$$

となる様な c が a と b の間に存在する。

多くの場合、b をある程度 a に近い値に制限しておけば、n を大きくする事によって対応する誤差項をどんどん小さくする事が出来、より精度の高い近似値が得られますが、これは誤差項が $n \to \infty$ で 0 に収束すると云う事であって、b の代わりに x と言う記号を使う事にして実際に極限をとれば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \cdots$$

と云う具合に関数 $f(x)$ が Taylor 展開可能である事を意味する事になります。

しかし稀に、b（あるいは x）をどんなに a に近い値としても誤差が 0 に収束しない場合があり、そう云った関数は Taylor 展開出来ない事が分かります。

6.4　Taylor の定理を使った近似値計算と誤差の評価

基本演習 1　e^x に Taylor の定理を適用して Napier 数 e の値を小数点以下 8 桁まで正確に求めて下さい。ただし $1<\mathrm{e}<3$ であることは既知とします。

e^x に対して、n 次の Taylor の定理から、任意の b に対して

$$\mathrm{e}^b = 1 + b + \frac{1}{2!}b^2 + \cdots + \frac{1}{n!}b^n + \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}b^{n+1}$$

となる c が 0 と b の間に存在する事が分かります。特に $b=1$ の場合には

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}$$

となる c が $0<c<1$ の範囲内に存在するわけですが、誤差が小数点以下８桁目に影響を与えない様にしなければなりません。

誤差が 10^{-9} 程度の大きさの場合、繰り上がりあるいは繰り下がりによって８桁目が影響を受ける可能性は十分ありますから誤差は 10^{-10} 程度に抑えたいところです。つまり、誤差が大きく見積もって 10^{-10} 程度であるように n を選ばなくてはなりません。

誤差の項は、Napier 数 e が１より大きいことと $0<c<1$ からまず $\mathrm{e}^c<\mathrm{e}^1$ が分かり（単調増大）、また３より小さいことは既知としているので

$$\big|(\text{誤差})\big| = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} \le \frac{3}{(n+1)!}$$

です。従ってまずは階乗の計算をしてみましょう。

$2! = 2$	$5! = 120$	$8! = 40320$	$11! = 39916800$
$3! = 6$	$6! = 720$	$9! = 362880$	$12! = 479001600$
$4! = 24$	$7! = 5040$	$10! = 3628800$	$13! = 6227020800$

$13!$ でようやく 10 桁の数になりますね。誤差の限界は 3 をこれで割ったものになります。

従って $n=12$ のときの誤差の絶対値を評価すると、

$$\big|(\text{誤差})\big| \le \frac{3}{6227020800} < \frac{3}{6000000000} = 0.0000000005$$

となっています。

一方近似値の方は

$$\begin{aligned}(\text{近似値}) &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{12!} \\ &= 2 + \frac{3\cdot4\cdots12 + 4\cdot5\cdots12 + \cdots + 11\cdot12 + 12 + 1}{12!} \\ &= 2 + \frac{344058145}{479001600} \\ &= 2.7182818282\cdots\end{aligned}$$

です。

従って

$$2.7182818282 - 0.0000000005 < \mathrm{e} < 2.7182818283 + 0.0000000005$$
$$2.7182818277 < \mathrm{e} < 2.7182818288$$

と言えますから、求める数値は小数点以下 8 桁までで

$$2.71828182$$

であることが分かりました。

この方法（$n=12$）では小数点以下 9 桁目は 7 か 8 のいずれかですが確定していませんね。これを知るためには $n=13$ 以上でやる必要があります。

基本演習 2　(1) 関数 $f(x)=\cos x$ に対して 2 次の項までを近似値とし 3 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x=0$ の近くで適用し、$\cos 1$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい（角度 1 はラジアンです）。

(2) 同様に 6 次の項までを近似値とし 7 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x=0$ の近くで適用し、$\cos 1$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。

(1) 微分してみると、

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(x) = \sin x$$

ですから、$x=0$ における値は、

$$f(0)=1,\quad f'(0)=0,\quad f''(0)=-1,$$

となっています。

Taylor の定理によれば、

$$\cos 1 = 1-\frac{1}{2!}1^2+\frac{1}{3!}\sin c\cdot 1^3$$

となるような $0<c<1$ が存在することが分かります。

右辺第２項までを近似値とすれば

$$\cos 1 \approx 1-\frac{1}{2}=0.5$$

と云う近似値が得られ、誤差は

$$\big|\text{(誤差)}\big| = \frac{1}{6}|\sin c| \le \frac{1}{6} = 0.1667$$

と評価されます。

あるいは、より細かい評価を望むのであれば、$0<c<1<\frac{\pi}{3}$ であることと、この範囲内で $\sin x$ が単調増加であることを考えれば、

$$\big|\text{(誤差)}\big| = \frac{1}{6}|\sin c| \le \frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12} < \frac{1.7321}{12} < 0.14435$$

と評価されます。

(2) ４次以降の導関数は

$$f^{(4)}(x)=\cos x,\quad f^{(5)}(x)=-\sin x,\quad f^{(6)}(x)=-\cos x,\quad f^{(7)}(x)=\sin x$$

であり、Taylor の定理によれば

$$\cos 1 = 1-\frac{1}{2!}1^2+\frac{1}{4!}1^4-\frac{1}{6!}1^6+\frac{1}{7!}\sin c\cdot 1^7$$

となる $0<c<1$ が存在します。右辺第４項までの和を近似値、残りを誤差とすれば、

$$\text{(近似値)} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{720} = \frac{720-360+30-1}{720} = \frac{389}{720} \approx 0.540278$$

であり、

$$\big|\text{(誤差)}\big| \le \frac{1}{7!} \le 0.000199$$

が分かります（先と同様に $\sin\frac{\pi}{3}$ を使えばもう少し小さく出来ますが・・・）。 □

Exercise

基本演習 1 e^x に Taylor の定理を適用して Napier 数 e の値を小数点以下 8 桁まで正確に求めて下さい。ただし $1<\mathrm{e}<3$ であることは既知とします。

基本演習 2 (1) 関数 $f(x)=\cos x$ に対して 2 次の項までを近似値とし 3 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x=0$ の近くで適用し、$\cos 1$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい（角度 1 はラジアンです）。

(2) 同様に 6 次の項までを近似値とし 7 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x=0$ の近くで適用し、$\cos 1$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。

基本演習 3 $f(x)=\sqrt{1+x}$ に対して 5 次の項までを近似値とし 6 次の項を誤差とする Taylor の定理を適用し、$\sqrt{3}$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。また、この近似によって $\sqrt{3}$ の値が小数点以下何桁まで確定するかも調べて下さい。

基本演習 4 関数 $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ に対して 3 次の項までを近似値とし 4 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x=0$ の近くで適用し、$\sqrt[3]{2}$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。また、この近似によって $\sqrt[3]{2}$ の値が小数点以下何桁まで確定するかも調べて下さい。

基本演習 5 関数 $f(x)=\log(1+x)$ に対して 3 次の項までを近似値とし 4 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x=0$ の近くで適用し、$\log 2$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。

基本演習 6 関数 $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$ に対して 3 次の項までを近似値とし 4 次の項を誤差とする Taylor の定理を $x=0$ の近くで適用し、$\frac{\pi}{4}$ の近似値とそのときの誤差の限界を求めて下さい。

発展演習 7 微分可能な関数

$$g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

の $x=0$ の近くでの x のべきによる級数展開はどうなるか考えてみましょう。

Exercise 解答

基本演習 3

$x = 0$ での Taylor の定理を適用：

$$(\text{近似値}) = 2.25 \qquad \big|(\text{誤差})\big| \leq \frac{63}{48} = 1.3125$$

これでは誤差が大き過ぎますね。$\sqrt{3}$ の値はどの桁も全く決定しません。

$x = 3$ での Taylor の定理を適用：

$$(\text{近似値}) = \frac{227025}{131072} = 1.73206329\ldots \qquad \big|(\text{誤差})\big| \leq \frac{21}{1024 \cdot 3^5} \leq 0.0000844$$

この場合、小数点以下２桁までが確定している。 □

基本演習 4

$$(\text{近似値}) = \frac{104}{81} = 1.28395\ldots \qquad \big|(\text{誤差})\big| \leq \frac{10}{3^5} \leq 0.04116$$

従って正確な値は１の位だけが確定しています。 □

基本演習 5

近似値は $\frac{5}{6} = 0.833\ldots$、誤差の限界は 0.25。 □

基本演習 6

$$(\text{近似値}) = \frac{2}{3} = 0.666\ldots \qquad \big|(\text{誤差})\big| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \leq 0.386$$

□